К.К. ПОНОМАРЕВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

517
П56
УДК 517.9 (075)

Пономарев К. К.

П56 Специальный курс высшей математики. Дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения. Учебник для техникумов. М., «Высшая школа», 1974.

367 с. с ил.

Учебник написан в соответствии с программой по высшей математике для техников-программистов по специальности № 1735, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР.

В книгу включен теоретический материал, который необходим программисту в его практической деятельности. Рассматриваются дифференциальные уравнения, краевые задачи и интегральные уравнения.

Материал излагается доступно, приводятся подробные выводы. Включено большое количество примеров, сопровождающихся подробными решениями. В конце каждой главы имеются примеры и задачи для самостоятельного решения.

П $\frac{0223—548}{001(01)—74}$ 251—74

Рецензенты:
Доцент **Я. М. Шабловский** и **В. Ф. Казакова** (Московский приборостроительный техникум).

© Издательство «Высшая школа» 1974

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

ЧАСТЬ I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка 6
§ 1. Основные положения 6
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Геометрическая интерпретация 8
§ 3. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Составление дифференциального уравнения 14
§ 4. Интегрирование дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной 18
§ 5. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделенными переменными 30
§ 6. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными 32
§ 7. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений 39
§ 8. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений . . 43
§ 9. Уравнение Бернулли 53
§ 10. Интегрирование дифференциальных уравнений в полных дифференциалах 58
§ 11. Уравнения Лагранжа и Клеро 62
§ 12. Метод Адамса — Крылова приближенного решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка 68
Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков 90
§ 1. Основные определения 90
§ 2. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения 90
§ 3. Общее и частное решения 93
§ 4. Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков путем понижения порядка 94
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений 113
§ 6. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами 116
§ 7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами 128
§ 8. Метод вариации произвольных постоянных 142
§ 9. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами. Приведение их к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами 146
§ 10. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами методом вариации постоянных 152
§ 11. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с помощью степенных рядов 157
§ 12. Метод Адамса приближенного решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка 161
Глава III. Системы дифференциальных уравнений 164
§ 1. Системы дифференциальных уравнений в нормальной форме 164
§ 2. Симметрическая форма системы дифференциальных уравнений 168
§ 3. Канонические системы дифференциальных уравнений высших порядков 169

§ 4. Приведение дифференциальных уравнений высшего порядка к системе дифференциальных уравнений. Обратная задача 170
§ 5. Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений 177
§ 6. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 194
§ 7. Матричный метод интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 215

ЧАСТЬ II

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава IV. Краевые задачи и их приложения 244
§ 1. Постановка краевых задач 244
§ 2. Линейная краевая задача 248
§ 3. Физические примеры краевых задач 256
§ 4. Задача о собственных значениях 273
§ 5. Уравнения теплопроводности и диффузии 277
§ 6. Уравнение диффузии нейтронов 289
Глава V. Вычислительные методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений 292
§ 1. Сведение краевой задачи к задаче Коши. Случай уравнения второго порядка 292
§ 2. Замена производных конечно-разностными соотношениями и сведение краевой задачи к системе линейных алгебраических уравнений (метод конечных разностей) 298
§ 3. Метод факторизации линейного дифференциального уравнения второго порядка 304
§ 4. Метод факторизации дифференциального уравнения диффузии нейтронов 307
§ 5. Метод факторизации конечно-разностных уравнений диффузионного типа 312
§ 6. Понятие о методе матричной факторизации. Матричная факторизация системы линейных алгебраических уравнений 316
§ 7. Матричная факторизация краевой задачи линейного дифференциального уравнения второго порядка 324

ЧАСТЬ III

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава VI. Основные теории интегральных уравнений 328
§ 1. Основные определения и классификация интегральных уравнений. Связь с задачей Коши для линейного дифференциального уравнения 328
§ 2. Физический пример 334
§ 3. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма 336
§ 4. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра 342
§ 5. Метод вырожденных ядер для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Сведение к системе линейных алгебраических уравнений 344
§ 6. Разложение вырожденного ядра в ряд Фурье 353
§ 7. Собственные значения и собственные функции интегрального уравнения 354
§ 8. Альтернатива Фредгольма 364
§ 9. Применение квадратурных формул для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра 365
Предметный указатель 366

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник написан в соответствии с программой по высшей математике, утвержденной МВ и ССО РСФСР по специальности № 1735 «Программирование для быстродействующих математических машин» для техников-программистов.

Подобный учебник составляется впервые и обладает рядом особенностей, так как усвоение изложенного в нем материала является необходимой теоретической базой практической деятельности будущих программистов. В связи с этим, особое внимание уделяется непосредственной связи изучаемого материала с рядом других дисциплин.

Автор преследовал цель научить будущего специалиста производить необходимые расчеты при решении задач, возникающих в различных отраслях науки и техники, а также постановке их на ЭВМ.

Все это повлияло на методику построения специального курса высшей математики. Теоретический материал излагается с подробными выводами, приведены многочисленные примеры, сопровождающиеся подробными решениями, и задачи прикладного характера. С целью закрепления материала включены упражнения для самостоятельного решения. Кроме того, для удобства пользования книгой в конце ее дается предметный указатель.

Автор

ЧАСТЬ 1

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее неизвестную функцию, независимые переменные и производные (или дифференциалы) от неизвестной функции по этим переменным. Иными словами, дифференциальным уравнением является такое уравнение, в котором неизвестная (искомая) функция находится под знаком производной (или дифференциала). Так, например, $x^2\,dy = 2y\,dx$, $y' = 5x$ — дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения называются *обыкновенными*, если неизвестная функция зависит только от **одного** аргумента, т. е. является функцией одной независимой переменной, и *в частных производных*, если неизвестная функция зависит от **нескольких** независимых переменных. Ограничимся, в основном, рассмотрением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Так, например, уравнение $xy' - y = \sin x$ есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, уравнение $y'' - y' + x = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение $y^{IV} + 2y'' = x$ — дифференциальное уравнение четвертого порядка.

В наиболее общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Проинтегрировать дифференциальное уравнение — значит найти все функции y, удовлетворяющие этому уравнению. Поэтому задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка состоит в отыскании функции y одного аргумента x, удовлетворяющей соотношению, которое содержит x, неизвестную функцию y и ряд ее производных y', y'', ..., $y^{(n)}$, т. е. соотношению (1.1).

Общим решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество, т. е. функция вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{1.2}$$

Здесь $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если эта функция есть неявная функция x, определяемая в результате n-кратного интегрирования уравнения вида

$$\Psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.3}$$

то такое уравнение называется *интегралом дифференциального уравнения* (1.1).

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Функция $y = x^2 + C$ — решение этого уравнения, так как дифференцируя ее и подставляя в заданное уравнение, получим тождество.

Пример 2. Интегралом дифференциального уравнения

$$x\frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

является выражение $\arcsin\frac{y}{x} = C - x$, так как дифференцируя эту функцию, заданную неявно, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - y^2/x^2}} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = -1$$

или, решая относительно производной,

$$y' = \frac{1}{x}\left(y - x^2\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}\right) = \frac{y}{x} - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Если вместо производной y' в дифференциальное уравнение подставить ее значение, то получим тождество:

$$x\left(\frac{y}{x} - \sqrt{x^2 - y^2}\right) - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

Частным называется решение, получаемое из общего решения, если произвольной постоянной интегрирования C придать определенное числовое значение.

Пусть x и y — координаты точки на плоскости; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные параметры. Тогда уравнение (1.2) определяет семейство плоских кривых, зависящее от n параметров. При частных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно получить отдельные кривые семейства, которые называются *интегральными кривыми*.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\int x\,dx + \int y\,dy = C_1,$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Здесь C_1 — постоянная интегрирования. Общий интеграл данного дифференциального уравнения есть

$$x^2 + y^2 = C,$$

где

$$C = 2C_1.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

Если в общем интеграле постоянной C придать определенное числовое значение, например, $C = 9$, то частный интеграл дифференциального уравнения

$$x^2 + y^2 = 9.$$

В этом случае частное решение дифференциального уравнения таково:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

Частных решений дифференциального уравнения будет бесконечно много. Так, при $C = 1, 2, 3, 4, \ldots$ и т. д., частные решения имеют вид:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \pm\sqrt{2 - x^2}, \quad y = \pm\sqrt{3 - x^2},$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}, \ \ldots \text{ и т. д.}$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \tag{1.4}$$

где F — заданная функция. Если функция F такова, что из уравнения (1.4) производную y' можно однозначно выразить через x и y, то уравнение в разрешенном относительно производной виде запишется так:

$$y' = f(x,\ y), \tag{1.5}$$

где f — заданная функция своих аргументов.

Симметричная форма дифференциального уравнения первого порядка

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1.6}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — заданные функции своих аргументов.

От равенства (1.6) можно легко придти к равенству вида (1.5) и наоборот. Имеем

$$N(x, y)\,dy = -M(x, y)\,dx,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y).$$

Обратный переход очевиден.

Общим решением дифференциального уравнения (1.5) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.7}$$

зависящая от произвольной постоянной C, если:

а) эта функция является решением дифференциального уравнения при любом значении произвольной постоянной;

б) функция φ такова, что из равенства (1.7) можно выразить C в виде однозначной функции x и y:

$$C = \Phi(x, y). \tag{1.8}$$

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, получающееся из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C. Таким образом, из общего решения можно получить частное решение.

Интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется конечное (т. е. не содержащее производных) уравнение

$$\psi(x, y) = 0, \tag{1.9}$$

такое, что если из него выразить y как функцию x, то $y(x)$ есть решение дифференциального уравнения. Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

задано в неявном виде

$$\Psi(x, y, C) = 0 \text{ или } \Phi(x, y) = C,$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Если общий интеграл дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ записан в виде $\Phi(x, y) = C$, то функция Φ называется *интегралом* этого уравнения. Смысл общего интеграла состоит в том, что если из него выразить y в виде функции от x и C, то получим общее решение. Поэтому, считают, что дифференциальное уравнение проинтегрировано, если найдено его решение или интеграл.

Общее решение (общий интеграл) зависит от произвольной постоянной интегрирования, поэтому в общей постановке задача интегрирования дифференциального уравнения является неопределенной, т. е. приводящей к многозначному результату. В прикладных задачах эту неопределенность можно устранить, наложив на искомую функцию дополнительное условие. Это условие называется *начальным условием*. В общем виде оно сводится к тому, чтобы искомая функция принимала наперед заданное значение $y = y_0$ при заданном значении независимой переменной $x = x_0$. Таким образом, из множества функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, выбирается та, которая удовлетворяет начальному условию.

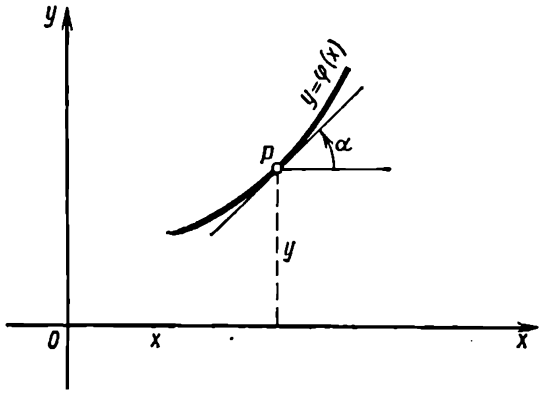


Рис. 1

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка является функция

$$y = \varphi(x), \qquad (1.10)$$

обращающая это уравнение в тождество. С геометрической точки зрения равенство (1.10) есть уравнение кривой в плоскости xOy. Эта кривая называется *интегральной кривой* и представляет собой график данного частного решения. Общее решение $y = \varphi(x, C)$ определяет бесконечное множество интегральных кривых, сплошь заполняющих некоторую область плоскости xOy. Все интегральные кривые являются гладкими кривыми, т. е. имеют непрерывно изменяющуюся касательную.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (1.5). График решения $y = \varphi(x)$ на плоскости xOy есть, как известно, интегральная кривая. Пусть α — угол между касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$ в точке $(x; y)$ и положительным направлением оси Ox (рис. 1). Принимая во внимание, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$ и $y' = f(x, y)$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y).$$

Следовательно, направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением. Проводя в каждой точке области задания функции $f(x, y)$ отрезок единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол α [где $\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$ или $\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y)$], получим так называемое *поле направлений* (рис. 2). Если в точке $(x_0; y_0)$ правая часть уравнения (1.5) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси ординат, так как равенство $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ возможно при $\alpha = \pi/2$. Если в точке $(x_0; y_0)$ правая часть

уравнения (1.5) обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то поле направлений в этой точке не определено, а сама точка называется *особой точкой* этого дифференциального уравнения.

Поле направлений определяется заданным дифференциальным уравнением и представляет собой график дифференциального уравнения. Оно дает возможность получить представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

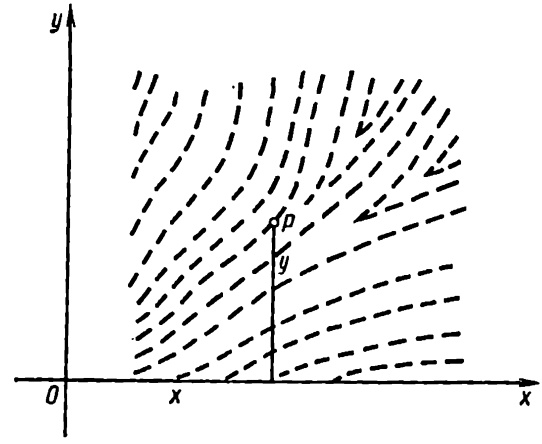


Рис. 2

Из дифференциального уравнения (1.5) очевидно, что любой паре значений (x, y) соответствует определенное значение y'. В точке $P(x; y)$ кривой существует касательная с наклоном $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Назовем *линейным элементом* точку $P(x; y)$ и отрезок прямой с наклоном $y' = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ определяет для каждой точки плоскости линейный элемент. Совокупность таких линейных элементов образует поле направлений

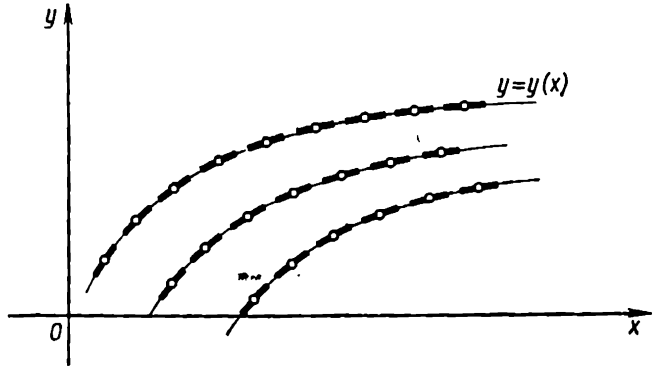


Рис. 3

(рис 3). Дифференциальное уравнение первого порядка тем самым отождествляется с полем направлений. Решить дифференциальное уравнение первого порядка значит определить такую кривую $y = y(x)$, которая в каждой своей точке $P(x; y)$ касается заданного этим уравнением поля направлений.

При постоянном наклоне $y' = k$ уравнение $k = f(x, y)$ определяет некоторую кривую в плоскости xOy, в точках которой отрезки

касательных имеют одинаковый наклон k. Эта кривая, имеющая линейные элементы одинакового направления, называется *изоклиной*.

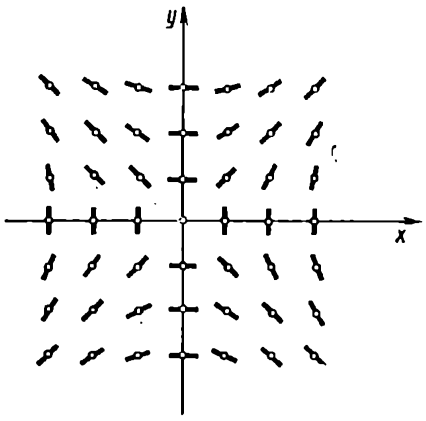


Рис. 4

Пример 1. Исследовать поле направлений дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{y}$ и найти его интегральные кривые.

Решение. Поле направлений обладает следующими особенностями:

при $x = 0$ $y' = 0$, т. е. линейные элементы находятся на оси ординат;

при $y = 0$ $y' = \infty$, т. е. линейные элементы находятся на оси абсцисс;

при $y = x$ $y' = 1$, т. е. линейные элементы лежат на биссектрисе координатного угла ($\alpha = 45°$).

Значения производной y' для координат x и y, принимающих числовые значения —3, —2, —1, 0, 1, 2 и 3, представлены в следующей таблице.

Таблица 1

x / y	—3	—2	—1	0	1	2	3
3	—1	—2/3	—1/3	0	1/3	2/3	1
2	—3/2	—1	—1/2	0	1/2	1	3/2
1	—3	—2	—1	0	1	2	3
0	∞	∞	∞	—	∞	∞	∞
—1	3	2	1	0	—1	—2	—3
—2	3/2	1	1/2	0	—1/2	—1	—3/2
—3	1	2/3	1/3	0	—1/3	—2/3	—1

Следует отметить, что при $y = 0$ производная y' не существует. Если нанести на график 49 точек и начертить линейные элементы для 48 точек, в которых они определены, то получим поле направлений (рис. 4). Из рисунка видно, что имеются две прямые, проходящие через начало координат: $y = x$ и $y = -x$, другие интегральные кривые асимптотически приближаются к этим линиям.

Представим заданное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

или, разделив переменные,

$$x\,dx = y\,dy$$

и проинтегрируем:

$$\int y\,dy = \int x\,dx,$$

следовательно,

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

и интегральные кривые

$$y^2 - x^2 = C,$$

где $C = 2C_1$. Эти уравнения (C — произвольная постоянная) являются уравнениями равносторонних гипербол и удовлетворяют данному

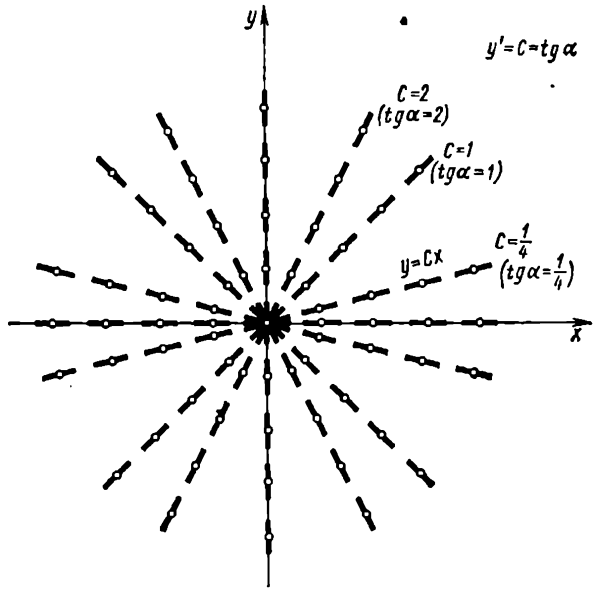


Рис. 5

дифференциальному уравнению, так как продифференцировав, имеем

$$2yy' - 2x = 0,$$

откуда

$$yy' = x \quad \text{или} \quad y' = \frac{x}{y},$$

т. е. имеем данное дифференциальное уравнение.

Пример 2. Найти изоклины дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}$.

Решение. Проинтегрируем данное дифференциальное уравнение, представив его предварительно в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

или, разделив переменные,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда после интегрирования получаем

$$\ln y = \ln x + \ln C = \ln Cx.$$

Потенцируя полученное равенство, находим общее решение: $y = Cx$. Итак, для дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}$ интегральными кривыми являются полупрямые $y = Cx$, где C — любое постоянное число $(-\infty < C < +\infty)$ (рис. 5).

Изоклинами являются полупрямые, выходящие из начала координат. В данном примере изоклины являются одновременно интегральными кривыми.

§ 3. ЗАДАЧА КОШИ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ. СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Нахождение решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего дополнительному условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.11}$$

где x_0 и y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*. Условия (1.11) называются *начальными данными* или *начальными условиями*.

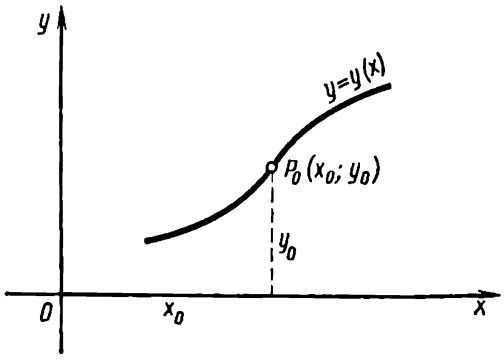


Рис. 6

С геометрической точки зрения решить задачу Коши значит найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $P_0(x_0; y_0)$ (рис. 6). Решение уравнения $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющего условию (1.11), при некотором значении C называется решением задачи Коши.

Чтобы решить дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными данными $y(x_0) = y_0$ в заданной области D при помощи общего решения, необходимо в общее решение $y = \varphi(x, C)$ подставить вместо x и y начальные значения x_0 и y_0:

$$y_0 = \varphi(x_0, C), \tag{1.12}$$

решить это уравнение относительно C и получить единственное, соответствующее начальным условиям, значение $C = C_0$. Затем найденное значение C_0 надо подставить в общее решение $y = \varphi(x, C)$. В результате имеем

$$y = \varphi(x, C_0), \tag{1.13}$$

т. е. единственное частное решение, удовлетворяющее выбранным начальным условиям.

Общее решение

$$y=\varphi(x,\ x_0,\ y_0), \tag{11.3'}$$

в котором роль постоянной интегрирования играет начальное значение y_0 решения $y=y(x)$ при фиксированном значении x_0 аргумента x, называется *общим решением в форме Коши*.

Пример. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=2x+3$$

при начальных условиях $x_0=0$, $y_0=1$.

Решение. Представим данное дифференциальное уравнение в виде

$$dy=(2x+3)\,dx,$$

откуда после интегрирования получаем общее решение

$$y=x^2+3x+C.$$

Подставляем начальные условия в общее решение:

$$1=0+3\cdot 0+C,\ \text{или}\ C=1.$$

Решение поставленной задачи Коши имеет вид

$$y=x^2+3x+1.$$

Как известно, с геометрической точки зрения решить задачу Коши — значит построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $(x_0;\ y_0)$. Из этого следует, что через любую точку $(x_0;\ y_0)$ плоскости может проходить только одно частное решение, которое удовлетворяет начальным данным $y(x_0)=y_0$. Говорят, что в любой точке частного решения выполняется условие единственности.

Решение, в каждой точке которого нарушается условие единственности решения задачи Коши, называется *особым*. Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, даже если $C\to\pm\infty$.

Если семейство интегральных кривых вида $y=\varphi(x,\ C)$ или $\Phi(x,\ y,\ C)=0$ имеет *огибающую*, т. е. кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и которая вся состоит из этих точек касания, то эта огибающая всегда является особым решением дифференциального уравнения. С одной стороны, огибающая является интегральной кривой (поскольку она состоит из точек, принадлежащих интегральным кривым), с другой стороны, как очевидно, в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши. Особое решение можно обнаружить в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения. Это такие интегральные кривые, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного дифференциального уравнения, выполняемых в процессе нахождения его общего решения или общего интеграла.

Возникает вопрос о том, можно ли по виду правой части дифференциального уравнения

$$y'=f(x,\ y)$$

сказать, имеет ли оно решение, соответствующее выбранным начальным условиям, и будет ли это решение единственным. Ответ на этот вопрос дает следующая фундаментальная теорема (приводится без доказательства).

Теорема существования и единственности решения. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y)$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$, *т. е. точка* $(x_0; y_0)$.

Если в некотором прямоугольнике $R\ (a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$, *содержащем внутри себя точку* $(x_0; y_0)$, *функция* $f(x, y)$ *непрерывна по* x *и* y *и имеет ограниченную частную производную по* y, *то существует*

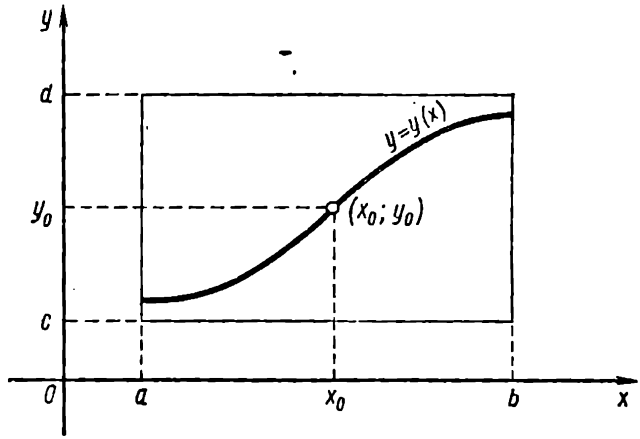


Рис. 7

единственное решение $y = y(x)$ *этого уравнения, определенное в интервале* $a < x < b$ *и принимающее при* $x = x_0$ *значение* $y(x_0) = y_0$ (рис. 7).

Другими словами, *при любых начальных условиях внутри прямоугольника* R *существует единственное им соответствующее решение, если только* $f(x, y)$ *удовлетворяет наложенным условиям.*

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ проходит только одна интегральная кривая. Теорема существования и единственности решения применяется при решении многих прикладных задач, так как в соответствии с ней, найдя решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, можно быть уверенным, что других решений нет, и получаем единственный закон явления, который определяется дифференциальным уравнением и начальным условием.

В приложениях математики к техническим наукам дифференциальные уравнения занимают особо важное место. Многие процессы с их помощью описываются проще и полнее. С помощью дифференциальных уравнений можно решать многие вопросы общетехнических и специальных дисциплин (физики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов,

химии, технологии производства, биологии, финансово-экономических дисциплин и др.).

Поэтому вполне понятно то внимание, которое должно быть уделено вопросу составления дифференциальных уравнений. Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической или технической) состоит в нахождении зависимости между переменными величинами и их приращениями. В ряде случаев дифференциальное уравнение можно получить, не рассматривая приращения, а учитывая их предварительно. Например, определяя скорость с помощью выражения $v = \frac{ds}{dt}$, не пишем Δs и Δt, хотя эти приращения фактически учтены, так как

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ускорение в момент времени t выражается зависимостью

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}.$$

При составлении дифференциальных уравнений приращения следует сразу же заменить соответствующими дифференциалами.

Изучение любого процесса сводится:

1) к определению его отдельных моментов;

2) к установлению общего закона его хода.

Отдельный момент процесса (элементарный процесс) описывается уравнением, связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами или производными — дифференциальным уравнением; закон общего хода процесса выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса, но уже без дифференциалов этих величин.

Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений нет. В большинстве случаев методика составления обыкновенных дифференциальных уравнений прикладных задач сводится к следующему:

1) подробному разбору условий задачи и составлению чертежа;

2) составлению дифференциального уравнения рассматриваемого процесса;

3) интегрированию составленного дифференциального уравнения и определению общего решения этого уравнения;

4) нахождению частного решения задачи на основании данных начальных условий (т. е. решение задачи Коши);

5) нахождению (по мере необходимости) вспомогательных параметров (при этом используются дополнительные условия задачи);

6) выводу общего закона рассматриваемого процесса и нахождению числовых значений искомых величин;

7) анализу ответа и проверке исходного положения задачи.

Некоторые из этих рекомендаций в зависимости от характера задачи можно не использовать.

В большинстве случаев задачи на составление и последующее решение полученных дифференциальных уравнений представляют, по сути, задачу Коши.

Итак, для эффективного освоения курса дифференциальных уравнений необходимо овладеть методами интегрирования и уметь составлять различные типы дифференциальных уравнений.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим интегрирование простейших типов дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Интегрирование дифференциальных уравнений, не содержащих искомую функцию. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x).$$

Предположим, что функция $f(x)$ определена и непрерывна в интервале (a, b). Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.14}$$

Разделив переменные, получаем

$$dy = f(x)\,dx.$$

Правую часть этого равенства можно рассматривать как дифференциал некоторой неизвестной функции $F(x)$. Поэтому, интегрируя последнее равенство, имеем

$$\int dy = \int f(x)\,dx, \tag{1.15}$$

откуда

$$y = F(x) + C.$$

Если в качестве первообразной $\int f(x)\,dx$ в равенстве (1.15) взять функцию $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, где x_0 — фиксированное число интервала (a, b), то общее решение принимает вид

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C.$$

Полагая в этом уравнении $x = x_0$, $y = y_0$, получим $C = y_0$, тогда

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0. \tag{1.16}$$

Итак, получено решение дифференциального уравнения (1.14) с начальными данными x_0 и y_0. Если в уравнении (1.16) считать вели-

чину y_0 произвольной, то тогда оно является общим решением дифференциального уравнения (1.14) в заданной области в форме Коши.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' = 3x - 1.$$

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то заданное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 1,$$

или, после разделения переменных,

$$dy = (3x - 1)\,dx.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$y = \int (3x - 1)\,dx = 3\int x\,dx - \int dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} - x + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3x^2}{2} - x + C\right)' = 3x - 1,$$

откуда

$$3x - 1 \equiv 3x - 1.$$

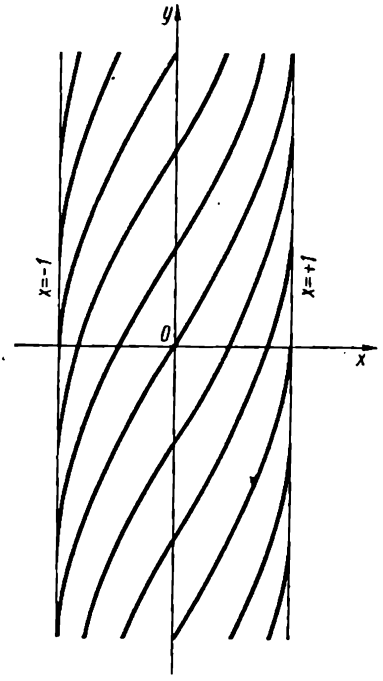


Рис. 8

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Решение. Правая часть дифференциального уравнения определена и непрерывна в интервале $(-1, +1)$ (рис. 8). Общее решение в области определения $|x| < 1$, $|y| < +\infty$ имеет вид

$$y = \arcsin x + C.$$

Правая часть данного дифференциального уравнения обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Прямые $x = \pm 1$ являются особыми решениями данного дифференциального уравнения. Они являются огибающими семейства кривых $y = \arcsin x + C$.

Задача 1. Материальная точка массы m расположена на кривой AB (рис. 9), вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти уравнение кривой AB, если материальная точка находится в равновесии при произвольном положении на кривой.

Решение. В положении равновесия равнодействующая силы тяжести и центробежной силы направлена по нормали к кривой AB, так как реакция связи направлена по нормали. На точку M дейст-

вуют сила тяжести $P=mg$ и центробежная сила $F=m\omega^2 x$. Здесь m — масса точки; g — ускорение силы тяжести.

Пусть искомое уравнение кривой AB имеет вид $y=y(x)$. Угловой коэффициент нормали к кривой AB равен $-\frac{1}{y'}$; угловой коэффициент равнодействующей равен $-\frac{mg}{m\omega^2 x}=-\frac{g}{\omega^2 x}$. Следовательно,

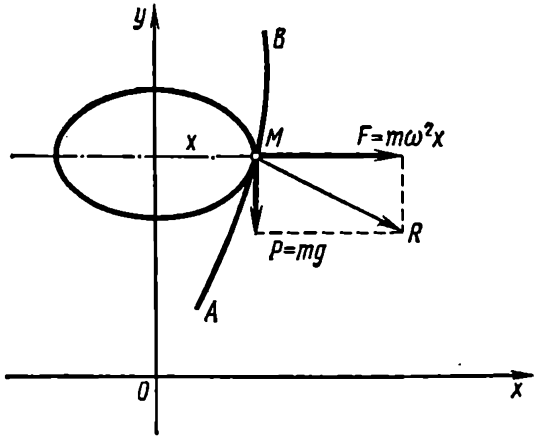


Рис. 9

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{g}{\omega^2 x},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2}{g}x.$$

Это дифференциальное уравнение типа $y'=f(x)$. Имеем

$$dy=\frac{\omega^2}{g}x\,dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем общее решение:

$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C,$$

определяющее семейство парабол (C — расстояние между кривыми семейства).

Задача 2. Материальная точка движется по прямой с постоянным ускорением a. Начальная скорость точки v_0. Найти закон движения точки.

Решение. По определению

$$\frac{dv}{dt}=a,$$

откуда

$$dv=a\,dt.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем общее решение

$$v=at+C_1. \qquad (*)$$

По условию необходимо решить задачу Коши со следующими данными: при $t=0$ (в начальный момент) $v=v_0$. Подставляя начальные данные в общее решение, имеем

$$v_0=0+C_1, \quad \text{или} \quad C_1=v_0.$$

Таким образом, уравнение (*) принимает вид

$$v=at+v_0. \qquad (**)$$

Уравнение (**) представляет закон движения в виде $v=\varphi(t)$. Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то решение задачи Коши (**) можно преобразовать к виду

$$\frac{ds}{dt}=at+v_0,$$

или

$$ds=at\,dt+v_0\,dt.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение рассматриваемой задачи:

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_2. \qquad (***)$$

Для определения постоянной интегрирования C_2 положим, что при $t=0$ $s=s_0$. В результате подстановки этих значений в равенство (***) имеем

$$s_0=0+0+C_2,$$

или $C_2=s_0$. Следовательно, уравнение движения (***) принимает вид

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0. \qquad (****)$$

Это уравнение представляет искомый закон движения в виде $s=f(t)$. Положив в уравнениях (**) и (****) $a=g$, $v_0=0$, $s_0=0$, $s=h$, найдем, в частности, закон свободного падения тела в пустоте:

$$v=gt \quad \text{и} \quad h=\frac{1}{2}gt^2.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y'=\frac{2x}{x^2+1}$.

Ответ. $y=\ln(x^2+1)+C$.

2. $y'=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

Ответ. $y=2[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]+C$.

3. $y'=\sqrt{1-x^2}$.

Ответ. $y=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

4. $y'=\cos^2 x$.

Ответ. $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$.

5. $y'=\sin^3 x$.

Ответ. $y=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

6. $y'=\frac{1}{x^2-1}$.

Ответ. $y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

7. $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Отв. $y=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$, особые решения: $x=\pm 1$.

8. $y'=\operatorname{ctg} x$.

Отв. $y=\ln|\sin x|+C$.

9. $y'=\frac{\ln x}{x}$.

Отв. $y=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

10. $y'=\ln x+1$.

Отв. $y=x\ln x+C$, особое решение $x=0$.

11. Найти уравнение кривой, для которой сумма длин отрезка касательной и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания.

Примечание. Длина отрезка касательной равна $\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$, а длина подкасательной равна $\frac{y}{y'}$.

Отв. $y'=\frac{2kx}{k^2x^2-1}$; $y=\frac{1}{k}\ln|k^2x^2-1|+C$.

12. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

Отв. $y'=\frac{k}{x}$; $y=k\ln|x|=C$.

2. Интегрирование дифференциальных уравнений, не содержащих независимую переменную. Пусть дано дифференциальное уравнение $y'=f(y)$. Предположим, что $f(y)$ — непрерывная и не обращающаяся в нуль в интервале (c, d) функция. Так как $\frac{dy}{dx}=y'$, то данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(y), \tag{1.17}$$

или

$$dy=f(y)\,dx.$$

Разделив переменные, получаем

$$\frac{dy}{f(y)}=dx.$$

Интегрируя, находим общий интеграл дифференциального уравнения 1.17)

$$\int\frac{dy}{f(y)}=x+C. \tag{1.18}$$

Обозначая первообразную функцию интеграла, находящегося в левой части равенства, через $F(y)$, запишем уравнение (1.18) в виде

$$F(y)=x+C,$$

откуда общее решение

$$y=\varphi(x, C). \tag{1.19}$$

Задача Коши при начальных условиях $y(x_0)=y_0$ в данной области D имеет единственное частное решение. Общий интеграл (1.18) в форме Коши имеет вид

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)}\,dy=x+x_0.$$

Здесь x_0 играет роль произвольной постоянной, а y_0 — фиксированное число, заключенное между c и d.

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'+y-1=0.$$

Решение. Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, запишем данное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=1-y;$$

после разделения переменных имеем

$$\frac{dy}{1-y}=dx.$$

Интегрируем последнее равенство:

$$-\int\frac{d(1-y)}{1-y}=\int dx,$$

откуда

$$-\ln(1-y)=x+C.$$

Дописав к левой части равенства $\ln 1=0$, получим

$$\ln 1-\ln(1-y)=x+C.$$

Тогда (так как $\ln e=1$) находим

$$\ln\frac{1}{1-y}=(x+C)\ln e,$$

отсюда

$$\ln\frac{1}{1-y}=\ln e^{x+C}.$$

Потенцируем обе части равенства:

$$\frac{1}{1-y}=e^{x+C}=e^x\cdot e^C=C_*\cdot e^x,\quad\text{где } C_*=e^C$$

или

$$1=(1-y)C_*e^x=C_*e^x-C_*ye^x,$$

откуда

$$C_*ye^x=C_*e^x-1.$$

Итак, искомое общее решение имеет вид

$$y=\frac{C_*e^x-1}{C_*e^x}=1-\frac{1}{C_*e^x}.$$

Задача 3. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу его мотор выключается и за 40 с скорость катера уменьшилась до $v_1 = 8$ км/ч (рис. 10). Сопротивление воды пропорционально скорости движения катера. Определить скорость катера через 2 мин после остановки мотора.

Решение. На движущийся катер действует сила $F = -kv$, где k — коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона сила

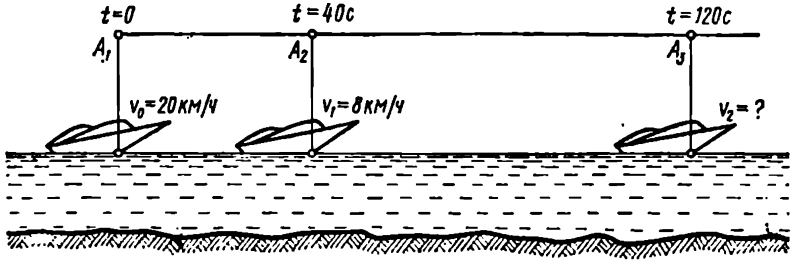


Рис. 10

равна произведению массы на ускорение: $F = m\frac{dv}{dt}$. Следовательно, дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \qquad (*)$$

Это дифференциальное уравнение типа $y' = f(y)$. Очевидно, что

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$$

После интегрирования имеем

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1.$$

Потенцируя последнее равенство, получим общее решение дифференциального уравнения (*):

$$v = e^{-\frac{k}{m}+C_1} = e^{C_1}e^{-\frac{k}{m}t} = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Здесь $e^{C_1} = C$. Учитывая начальные условия: при $t = 0$ $v = 20$ км/ч, можем записать:

$$20 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}; \quad C = 20.$$

Тогда общий закон движения (решение задачи Коши) имеет вид

$$v = 20e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad (**)$$

Учитывая дополнительные условия (при $t = 40\text{ с} = 1/90$ ч скорость катера $v = 8$ км/ч), можем записать

$$8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}, \quad \text{или} \quad e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Подставляя числовые значения в найденный закон движения (**), получим

$$v = 20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-1/30} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \cong 1{,}28 \text{ км/ч}.$$

Итак, скорость катера через 2 мин после остановки мотора станет равной 1,28 км/ч.

Задача 4. Температура вынутого из печи тела в течение 20 мин падает от 200 °С до 150 °С (рис. 11). Температура воздуха равна

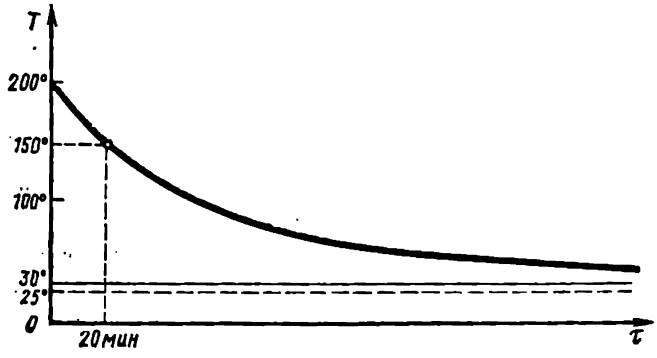


Рис. 11

25 °С. Через сколько времени от момента начала охлаждения температура тела понизится до 30°С?

Решение. В силу закона теплопроводности, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. С изменением разности температур в течение процесса охлаждения меняется также и скорость охлаждения тела, следовательно, процесс неравномерный. Дифференциальное уравнение охлаждения

$$\frac{dT}{d\tau} = k(T - \tau_0),$$

где T — температура тела; τ_0 — температура окружающего воздуха (в данном случае 25 °С); $\frac{dT}{d\tau}$ — скорость охлаждения; k — коэффициент пропорциональности. Это дифференциальное уравнение вида $y' = f(y)$. Пусть τ — искомое время охлаждения. Тогда, разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{T - t} = k\,d\tau, \quad \text{или} \quad \frac{dT}{T - 25} = k\,d\tau.$$

Учитывая, что

$$\frac{dT}{T-25}=\frac{d(T-25)}{T-25},$$

и интегрируя, получаем

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25}=k\int d\tau,$$

откуда

$$\ln(T-25)=k\tau+\ln C.$$

Потенцируя обе части последнего равенства, имеем

$$e^{\ln(T-25)}=e^{k\tau+\ln C}=e^{k\tau}\cdot e^{\ln C},$$

Так как $e^{\ln N}=N$, то окончательно получим:

$$T-25=Ce^{k\tau}. \qquad (*)$$

Произвольную постоянную интегрирования C определяем из начальных условий (при $\tau=0$ мин $T=200$ °С):

$$200-25=Ce^{k\cdot 0}=C;\quad C=175.$$

Величину e^k находим из дополнительных условий (при $\tau=20$ мин $T=160$ °С):

$$160-25=175\,(e^k)^{20},$$

$$e^k=\left(\frac{135}{175}\right)^{1/20}=\left(\frac{27}{35}\right)^{1/20}.$$

Таким образом, уравнение (*) принимает вид

$$T=175\left(\frac{27}{35}\right)^{\tau/20}+25.$$

Из последнего уравнения определяем искомое время τ:

$$5=175\left(\frac{27}{35}\right)^{\tau/20},$$

или

$$\frac{1}{35}=\left(\frac{27}{35}\right)^{\tau/20}.$$

Окончательно находим:

$$\tau=\frac{-20\ln 35}{\ln 27-\ln 35}=\frac{-20\cdot 3{,}555}{-0{,}260}\cong 273{,}5=274 \text{ мин}.$$

Итак, тело охладится до температуры 30 °С через 4 ч 34 мин.

Задача 5. Проводнику сообщен заряд $Q=1000$ Кл. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна имеющемуся заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике через 10 мин, если за первую минуту потеряно 100 Кл?

Решение. Предположим, что в момент t заряд проводника стал равен Q. Скорость потери заряда в этот момент равна $-\frac{dQ}{dt}$.

Так как эта скорость пропорциональна заряду Q, то дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$-\frac{dQ}{dt}=kQ, \qquad (*)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Это дифференциальное уравнение типа $y'=f(y)$.

Запишем уравнение (*) в виде

$$\frac{dQ}{Q}=-k\,dt.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln Q=-kt+C_1,$$

откуда после потенцирования находим общее решение:

$$Q=e^{C_1}e^{-kt}=Ce^{-kt}.$$

Используя начальные условия (при $t=0$, $Q=Q_0$), определяем постоянную интегрирования C:

$$Q_0=Ce^{-k\cdot 0};\quad C=Q_0.$$

Следовательно, процесс описывается уравнением

$$Q=Q_0e^{-kt}. \qquad (**)$$

Учитывая дополнительные условия, имеем при $t=1$ мин $Q=900$ Кл, откуда

$$900=1000e^{-k\cdot 1};\quad e^k=0{,}9.$$

Подставляя найденное значение в равенство (**), получим

$$Q=1000\cdot 0{,}9^t.$$

Таким образом, через 10 мин заряд проводника

$$Q=1000\cdot 0{,}9^{10}\approx 348{,}7 \text{ Кл}.$$

Задача 6. Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна его наличному количеству. Найти, какой процент первоначального количества (N_0) радия распадается через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Скорость распада определяется количеством радия, распавшимся за единицу времени. За малый промежуток времени Δt количество распавшегося радия равно $kN\,\Delta t$, где N количество радия в данный момент, k — коэффициент пропорциональности. Это же количество, взятое с отрицательным знаком (масса убывает), равно приращению массы за время Δt:

$$\Delta N=-kN\,\Delta t.$$

Разделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = -kN.$$

Полученное равенство представляет собой дифференциальное уравнение типа $y' = f(y)$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dN}{N} = -k\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln N = -kt + \ln C.$$

В результате потенцирования, имеем

$$N = Ce^{-kt}. \qquad (*)$$

Произвольную постоянную интегрирования C определяем из начальных условий (при $t = 0$, $N = N_0$):

$$N_0 = Ce^{-k \cdot 0}; \quad C = N_0.$$

Уравнение (*) принимает вид

$$N = N_0 e^{-kt}. \qquad (**)$$

Коэффициент k определим из дополнительных условий (при $t = 1590$, $N = \frac{N_0}{2}$):

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-1590k},$$

или

$$-1590k = -\ln 2,$$

откуда искомый коэффициент $k = 0{,}00044$. Подставляя значение k в уравнение (**), имеем

$$N(t) = N_0 e^{-0{,}00044t}.$$

Согласно полученному уравнению, количество радия, оставшегося нераспавшимся через 200 лет,

$$N(200) = N_0 e^{-0{,}00044 \cdot 200} = N_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 N_0.$$

Итак, через 200 лет распадается лишь 8,5% первоначального количества радия.

Задача 7. Предположим, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти зависимость между численностью населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$.

Решение. Скорость роста численности населения есть производная от количества населения A по времени t, т. е. $\frac{dA}{dt}$. В соот-

ветствии с условием задачи можно написать следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dA}{A} = k\,dt.$$

Интегрируя почленно это выражение, найдем общее решение дифференциального уравнения

$$\ln A = \ln e^{kt+C_1},$$

или, потенцируя,

$$A = e^{kt}e^{C_1} = Ce^{kt}. \qquad (*)$$

Найдем численность населения через год:

$$A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{(100+a)\,A_0}{100}.$$

Подставляя в общее решение (*) значения $A = A_0$ и $t = 0$, определим постоянную интегрирования C:

$$A_0 = Ce^{k\cdot 0} = Ce^0; \quad C = A_0.$$

Таким образом, решение (*) принимает вид

$$A = A_0e^{kt}. \qquad (**)$$

Для вычисления множителя e^k используем дополнительные условия. Подставляя численность населения через год (т. е. при $t = 1$) в уравнение (**), имеем

$$\frac{(100+a)\,A_0}{100} = A_0e^{k\cdot 1} = A_0e^k,$$

откуда

$$e^k = \frac{100+a}{100}.$$

Подставляя найденное значение в уравнение (**), получим искомое решение:

$$A = A_0\left(\frac{100+a}{100}\right)^t,$$

выражающее зависимость между численностью населения и временем.

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y' = y^2(1+y^2)^2$.

Ответ. $-\dfrac{2+3y^2}{2y(1+y^2)} - \dfrac{3}{2}\operatorname{arctg} y = x + C.$

2. $y' = y + 1$.

Ответ. $y = Ce^x - 1.$

3. $y' = \sin y$.

Отв. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = Ce^x$.

4. $y' = \cos y$.

Отв. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) = Ce^x$.

5. $y' = y^3 + 1$.

Отв. $\frac{1}{6} \ln \frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + C$.

6. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$.

Отв. $y - \operatorname{arctg} y = x + C$.

7. $y' = y \ln y$.

Отв. $\ln y = Ce^x$.

8. $y' = y\sqrt{y}$.

Отв. $y^{-1/2} = -\frac{1}{2} x + C$.

9. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = y$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $P(0; 1)$.

Отв. $y = Ce^x$; $y = e^x$.

10. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = \frac{1}{y}$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $Q(0; 0)$.

Отв. $y^2 = 2x + C$; $y^2 = 2x$.

11. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox прямо пропорционален ординате точки касания.

Отв. $y = Ce^{kx}$.

12. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти закон охлаждения тела, если температура воздуха 20 °С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 °С до 60 °С. Через какое время температура тела понизится до 30 °С?

Отв. $T = 20 + 80 \cdot 2^{-t/20}$; температура тела понизится до 30° через 1 ч.

13. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества R_0. Какой процент первоначального запаса радия распадется через 100 лет?

Отв. $R = R_0 e^{-0{,}00043t}$; через 100 лет распадется 4,2% первоначального запаса радия.

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными имеет вид

$$f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0, \tag{1.20}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — коэффициенты при dx и dy — являются непрерывными функциями соответственно только x или только y. В этом случае дифференциальное уравнение можно интегрировать почленно.

Общий интеграл дифференциального уравнения (1.20)

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C, \tag{1.21}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(y)\,dy = C. \tag{1.22}$$

Если $f(x_0)$ и $\varphi(y_0)$ не равны одновременно нулю, то решение при начальных условиях x_0, y_0 можно найти обычным способом по общему интегралу (1.21).

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$x^2\,dx+(y+1)\,dy=0$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0; 1).

Решение. Интегрируя почленно данное уравнение, получаем

$$\int x^2\,dx+\int(y+1)\,dy=0.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения принимает вид

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y=C.$$

Полагая $x=0$, $y=1$, находим

$$0+\frac{1}{2}+1=C;\quad C=\frac{2}{3}.$$

Искомая интегральная кривая определяется уравнением

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y=\frac{3}{2},$$

или

$$2x^3+3y^2+6y=9.$$

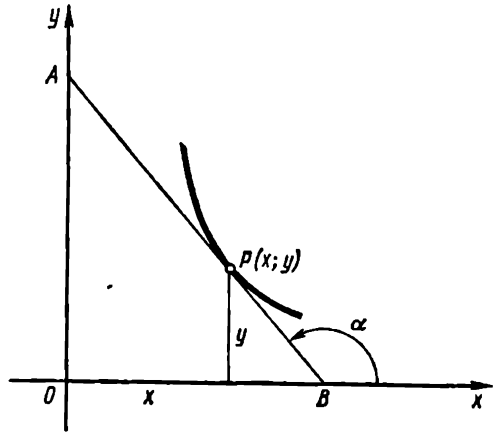


Рис. 12

Задача 1. Найти кривую, проходящую через точку (2; 3), если известно, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам (рис. 12).

Решение. Пусть точка $P(x;\ y)$ — середина касательной AB, по условию совпадающая с точкой касания. В силу подобия треугольников, имеем

$$\overline{OA}=2y;\quad \overline{OB}=2x.$$

Угловой коэффициент касательной в точке $P(x;\ y)$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=-\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=-\frac{y}{x}.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$xy=C.$$

Это уравнение определяет семейство гипербол. Так как кривая должна проходить через точку (2; 3), то $2 \cdot 3 = C$. Следовательно, уравнение искомой кривой имеет вид $xy = 6$.

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $(x + 2x^3)\,dx + (y + 2y^3)\,dy = 0$.
Ответ. $x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = C^2$.
2. $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.
Ответ. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$.
3. $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$.
Ответ. $\arcsin x + \arcsin y = C$.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$f(x)\,\varphi(y)\,dx + \psi(x)\,\Phi(y)\,dy = 0. \tag{1.23}$$

Предположим, что функции $f(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$ и $\Phi(y)$ непрерывны. Разделим дифференциальное уравнение (1.23) на произведение членов, дифференциалы переменных которых отсутствуют в членах левой части уравнения, т. е. на $\varphi(y)\,\psi(x)$. В результате получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{f(x)\,dx}{\psi(x)} + \frac{\Phi(y)\,dy}{\varphi(y)} = 0. \tag{1.24}$$

Обозначим через $F(x)$ частное $\frac{f(x)}{\psi(x)}$, а через $F(y)$ частное $\frac{\Phi(y)}{\varphi(y)}$, тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$F(x)\,dx + F(y)\,dy = 0.$$

Интегрируя почленно это дифференциальное уравнение, получим его общий интеграл, следовательно, и общий интеграл дифференциального уравнения (1.23):

$$\int F(x)\,dx + \int F(y)\,dy = C, \tag{1.25}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} F(y)\,dy = C. \tag{1.25'}$$

Обозначим через $H(x)$ и $G(y)$ первообразные интегралов, входящих в левую часть уравнения (1.25), тогда получим

$$G(y) = -H(x) + C.$$

Разрешив последнее равенство относительно y, найдем общее решение дифференциального уравнения (1.23):

$$y = K(x) + C_*. \tag{1.26}$$

Здесь $K(x)$ — символическая запись получаемой новой функции x, а C_* — новая постоянная интегрирования.

Если в дифференциальном уравнении (1.23) функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ равны единице, то получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными, общий интеграл которого находится непосредственным интегрированием:

$$\int f(x)\,dx + \int \Phi(y)\,dy = C.$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$x\,dy = y\,dx.$$

Решение. Обе части дифференциального уравнения разделим на произведение xy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, найдем

$$\ln y = \ln x + \ln C = \ln Cx.$$

Потенцируя, получим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = Cx.$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(xy^2 + x) + (y - x^2 y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Решение. Преобразуем данное дифференциальное уравнение следующим образом:

$$x(y^2 + 1)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0.$$

Разделим переменные, тогда

$$\frac{x\,dx}{1 - x^2} + \frac{y\,dy}{y^2 + 1} = 0.$$

Решение такого дифференциального уравнения можно получить непосредственным интегрированием:

$$\int \frac{x\,dx}{1 - x^2} + \int \frac{y\,dy}{y^2 + 1} = C,$$

откуда

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + \frac{1}{2}\ln(y^2 + 1) = C,$$

или

$$\ln(y^2 + 1) - \ln(1 - x^2) = C_1,$$

где $C_1 = 2C$. Далее имеем

$$\ln \frac{y^2+1}{1-x^2} = C_1;$$

после потенцирования получим

$$\frac{y^2+1}{1-x^2} = e^{C_1}.$$

Обозначая для простоты $e^{C_1} = C_2$, запишем общий интеграл в виде

$$\frac{y^2+1}{1-x^2} = C_2.$$

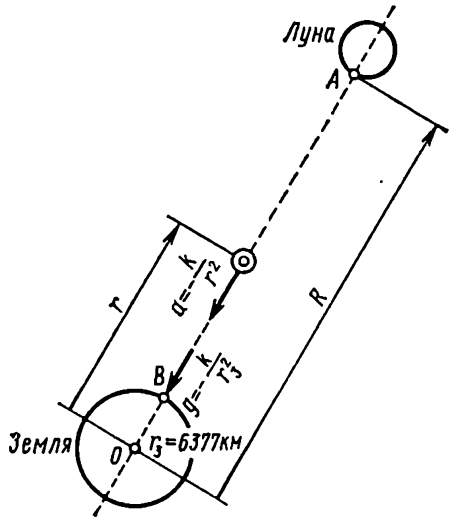


Рис. 13

Так как постоянная интегрирования может принимать какое угодно значение, то дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Задача 1. Падающее под действием силы тяжести тело (рис. 13) приобретает ускорение $a = \frac{k}{r^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, r — расстояние падающего тела от центра Земли. Найти время падения тела, если оно находится от Земли на расстоянии $R = 60{,}27 r_з$. Радиус Земли $r_з = 6377$ км $= 6{,}377 \cdot 10^6$ м.

Решение. Пусть R — расстояние Луны от центра Земли; g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли. Тогда, в соответствии с условиями задачи,

$$a = \frac{k}{r_з^2} = -g,$$

откуда

$$k = -gr_з^2.$$

Общее выражение для ускорения в этом случае принимает вид

$$a = -\frac{gr_з^2}{r^2}.$$

С другой стороны, если предположить, что тело падает к центру Земли O прямолинейно (см. рис. 13), то имеем

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt},$$

откуда

$$\frac{a}{v} = \frac{dv}{dr}, \quad a = \frac{v\,dv}{dr}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{v\,dv}{dr} = -\frac{gr_з^2}{r^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$v^2 = \frac{2gr_з^2}{r} + C.$$

Из начальных условий известно, что при $r = R$, $v = 0$. Подставим эти значения в последнее равенство:

$$C = -2g\frac{r_з^2}{R}.$$

Вместе с тем

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2gr_з^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)},$$

откуда

$$dt = -\sqrt{\frac{rR}{2gr_з^2(R-r)}}\,dr.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$t = -\int_R^{r_з}\sqrt{\frac{rR}{2gr_з^2(R-r)}}\,dr = \int_{r_з}^{R}\sqrt{\frac{rR}{2gr_з^2(R-r)}}\,dr. \qquad (*)$$

Вычислим этот интеграл с помощью подстановки $\frac{r}{R-r} = \operatorname{tg}^2\varphi$. Имеем

$$r = \frac{R\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = R\sin^2\varphi; \qquad (**)$$

$$dr = 2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Из уравнения (**) имеем

$$\sin^2\varphi_1 = \frac{r_з}{R},\quad \sin^2\varphi_2 = 1,$$

т. е.

$$\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\frac{r_з}{R}};\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя найденные значения в выражение (*), получим

$$t = \sqrt{\frac{R}{2gr_з^2}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\operatorname{tg}\varphi 2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{R}{r_з}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}2\sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{R}{r_з}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{R}{r_з}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_2}{2} + \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{R}{r_з}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r_з}{R}} + \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right).$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$t=\frac{60{,}27}{3600}\sqrt{\frac{60{,}27\cdot 6{,}377\cdot 10^6}{19{,}62}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1+\frac{\sin 2\varphi_1}{2}\right)\cong 116 \text{ ч}$$

$$(\varphi_1=7^\circ 24' 33''=0{,}1292 \text{ рад}).$$

Итак, тело, находящееся от Земли на расстоянии Луны, упадет на Землю через 116 ч (почти через 5 суток).

Задача 2. В 75 л сусла, наполняющего резервуар, первоначально содержалось 3 кг сахара. Приток воды составляет 4 л в минуту, а расход сусла 2 л в минуту. Концентрация поддерживается равномерной по всему объему с помощью перемешивания (рис. 14).

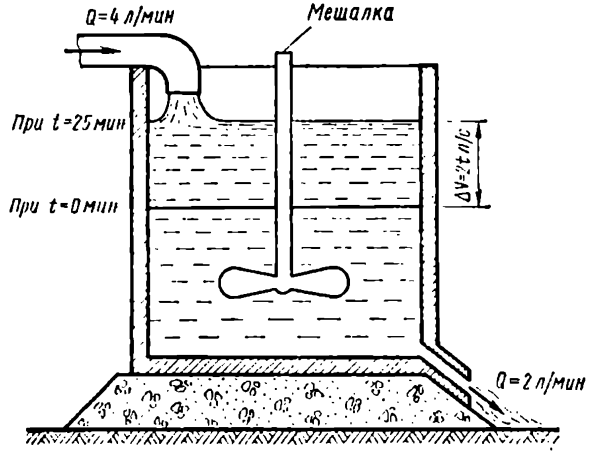


Рис. 14

Сколько сахара будет содержаться в растворе, находящемся в резервуаре, через 25 мин?

Решение. Пусть x — количество сахара в резервуаре в момент t (в кг); t — время, прошедшее от начального момента t_0 (в мин); — dx — количество сахара в растворе, выпущенного из резервуара за время dt (x — убывающая функция времени). К моменту t в резервуар налито $4t$ л и выпущено $2t$ л сусла. Следовательно, в резервуаре стало на $(4-2)t=2t$ л сусла больше. Таким образом, общее количество жидкости равно $75+2t$ л и в ней растворено x кг сахара. За время dt объем раствора уменьшается на $2dt$ л, а количество растворенного в нем сахара на dx кг.

Считая концентрацию сусла постоянной по всему объему, получим количество сахара в одном литре: $\frac{x}{75+2t}$ кг. Следовательно, за промежуток времени dt количество растворенного сахара уменьшится на $\frac{x}{75+2t}2dt$ (кг).

Итак, дифференциальное уравнение изменения концентрации сахара имеет вид

$$-dx=\frac{2x\,dt}{75+2t}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$-\frac{dx}{x}=\frac{2dt}{75+2t}.$$

Учитывая начальные условия ($t_0=0$ с, $t_1=25$ с; $x_0=3$ кг, $x_1=x$ кг), получим

$$-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x}=\int_{t_0}^{t_1}\frac{2dt}{75+2t},$$

или

$$-\int_{3}^{x}\frac{dx}{x}=\int_{0}^{25}\frac{d(75+2t)}{75+2t},$$

откуда

$$-[\ln x]_3^x=[\ln(75+2t)]_0^{25}$$

и

$$-(\ln x-\ln 3)=\ln 125-\ln 75,$$

или

$$\ln\frac{3}{x}=\ln\frac{125}{75}=\ln\frac{5}{3}.$$

Потенцируя, имеем

$$\frac{3}{x}=\frac{5}{3},\ \text{откуда}\ x=1{,}8\ \text{кг}.$$

Таким образом, через 25 мин в резервуаре останется 1,8 кг сахара.

Задача 3. Найти уравнение кривой, вид которой принимает уровень грунтовых вод вблизи колодца, простирающегося до непроницаемого слоя (рис. 15).

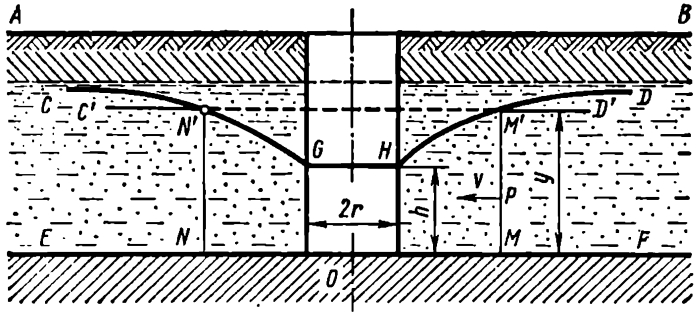


Рис. 15

Решение. Пусть AB — поверхность грунта, $C'D'$ — поверхность грунтовых вод до устройства колодца, EF — водонепроницаемый слой, ограничивающий поток грунтовых вод.

Если высота воды в колодце поддерживается на постоянном уровне GH, то поверхность грунтовых вод вблизи колодца пони-

жается определенным образом (рис. 15). Уровень поверхности грунтовых вод C' D' переходит в две искривленные ветви CG и DH, которые замыкаются на уровне воды GH. Поверхность уровня грунтовых вод представляет собой поверхность вращения вокруг оси Oy меридиональной линии GC или HD. Кривая HD определяется на основании опытного правила, по которому скорость течения v воды в точке P пропускающего (дренирующего) грунта пропорциональна наклону кривой в точке M', лежащей на вертикали точки P.

Обозначая коэффициент пропорциональности через k, получим

$$v = k\frac{dy}{dx}.$$

Через боковую поверхность цилиндра $N'NMM'$ радиально внутрь протекает количество воды

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi xyk\frac{dy}{dx},$$

которое для всего цилиндра радиуса x равно расходу воды в колодце. Итак, получаем дифференциальное уравнение, которое после разделения переменных приводится к виду:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q}y\,dy.$$

Интегрируя обе части равенства, получим

$$\ln x = \frac{\pi k}{Q}y^2 + C. \qquad (*)$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что кривая поверхности DH переходит в поверхность колодца GH.

Если диаметр колодца $2r$, а глубина воды в колодце h, то при $x = r$ величина $y = h$, т. е.

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q}h^2 + C,$$

или

$$C = \ln r - \frac{\pi k}{Q}h^2. \qquad (**)$$

Подставляя выражение (**) в уравнение (*), получаем уравнение искомой кривой:

$$\ln\frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q}(y^2 - h^2),$$

или

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{x}{r} + h^2.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $x(1+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$.
Отв. $(1+x^2)(1+y^2) = C^2$.
2. $(xy - x)\,dx + (xy + x - y - 1)\,dy = 0$.
Отв. $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = C$.
3. $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$.
Отв. $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, особые решения $y = \pm 1$.
4. $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$.
Отв. $y = 1 + C(x+1)$, $x \neq -1$.
5. $(y^2 + xy^2)\,dx + (x^2 - yx^2)\,dy = 0$.
Отв. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$.
6. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx - e^y dy) - (1+y)\,dy = 0$.
Отв. $2e^y - e^{2x} + 2\operatorname{arctg} y + \ln(1+y^2) = C$.
7. $(x + xy)\,dx + (y + xy)\,dy = 0$.
Отв. $e^{x+y} = C(x+1)(y+1)$.
8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = y\cos x$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $P(0; 1)$.
Отв. $y = e^{\sin x}$.
9. Найти функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(1+x^2)\,y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$$

и начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.
Отв. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$.
10. $y\sqrt{y^2-1}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.
Отв. $x\sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2} = Cy$.
11. $e^{x^2-y^2} + \dfrac{y}{x^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$.
Отв. $2e^{2x} + 3e^{y^2} = C$.

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией* n-й степени относительно x и y, если при любом t справедливо равенство

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \tag{1.27}$$

где t — произвольное число, n — степень однородности. Например, $\sqrt{x^2+y^2}$ — однородная функция первой степени, так как $\sqrt{x^2t^2 + y^2t^2} = t\sqrt{x^2+y^2}$.

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1.28}$$

называется *однородным*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции своих аргументов одинаковой степени, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка. Однородное дифференциальное уравнение легко может быть преобразовано в диффе-

ренциальное уравнение с разделяющимися переменными. Для этого введем новую функцию v, положив

$$\frac{y}{x}=v, \quad \text{или} \quad y=vx. \tag{1.29}$$

Дифференцируя, находим

$$dy=v\,dx+x\,dv. \tag{1.29'}$$

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$xy+y^2=(2x^2+xy)\,y'.$$

Р е ш е н и е. Запишем данное дифференциальное уравнение в виде

$$(xy+y^2)\,dx-(2x^2+xy)\,dy=0.$$

Функции $M(x,\ y)=xy+y^2$ и $N(x,\ y)=2x^2+xy$ — однородные функции второй степени, так как умножая x и y на t, имеем

$$t^2xy+t^2y^2=t^2(xy+y^2)$$

и, соответственно,

$$2t^2x^2+t^2xy=t^2(2x^2+xy).$$

Таким образом, данное дифференциальное уравнение является однородным. С помощью подстановки $y=vx$ преобразуем заданное дифференциальное ураненне:

$$vx^2+v^2x^2=x^2(2+v)\frac{d(vx)}{dx},$$

или

$$v+v^2=(2+v)\left(\frac{dv}{dx}x+v\right)$$

и

$$v+v^2=2x\frac{dv}{dx}+vx\frac{dv}{dx}+2v+v^2,$$

откуда

$$x(2+v)\frac{dv}{dx}=-v.$$

Разделим переменные:

$$\frac{(2+v)\,dv}{v}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем

$$2\ln v+v+\ln x=C.$$

Далее,

$$\ln(v^2x)=C-v;$$

потенцируя, получим

$$v^2x=e^{C-v}, \quad \text{или} \quad v^2x=C_1e^{-v},$$

где $C_1=e^C$.

Так как $v=\frac{y}{x}$, то

$$\frac{y^2}{x^2}x=C_1e^{-\frac{y}{x}}$$

и общий интеграл

$$y^2=C_1xe^{-\frac{y}{x}}.$$

Задача. Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат.

Решение. Изогональными траекториями называются кривые, образующие в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку прямой пучка (рис. 16).

Пусть уравнение данного пучка $y=ax$. Положим, $\operatorname{tg}\alpha=k$. Текущие координаты точки траектории обозначим через (x, y). Тогда угловой коэффициент касательной к траектории в этой точке будет $\frac{dy}{dx}$. По условию

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-a}{1+\frac{dy}{dx}a}.$$

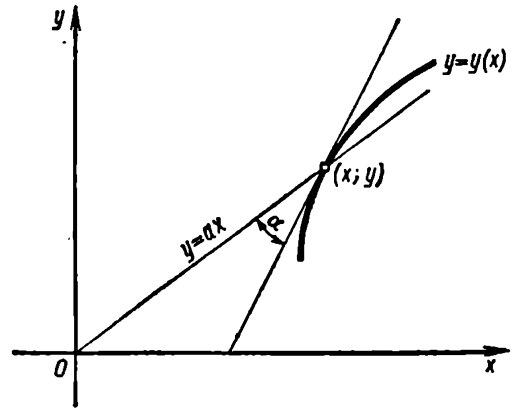


Рис. 16

В любой точке $(x; y)$ всегда $a=y/x$ (из уравнения пучка). Поэтому

$$k=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+kx}{x-ky}.$$

Для решения полученного однородного дифференциального уравнения воспользуемся подстановкой

$$y=ux, \text{ откуда } dy=u\,dx+x\,du.$$

Далее имеем

$$x\,du-ku^2\,dx-kxu\,du-k\,dx=0,$$

или после группировки членов

$$x(1-ku)\,du-k(1+u^2)\,dx=0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{k}\frac{1-ku}{1+u^2}\,du-\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{k}\left[\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{k}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}\right]-\int\frac{dx}{x}=0,$$

или

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}u+\ln C=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x\sqrt{1+u^2}.$$

Учитывая, что $u=\frac{y}{x}$ и $\ln e=1$, имеем

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\ln C,$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Переходя к полярным координатам, т. е. полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, находим, что искомыми изогональными траекториями служат логарифмические спирали

$$r=Ce^{\varphi/k}.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $x(x+2y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$.
Ответ. $x^3+3x^2y-y=C$.
2. $(py-qx)\,dx-(px+qy)\,dy=0$.
Ответ. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.
3. $y'=\dfrac{x-y}{x-2y}$.
Ответ. $x^2-2xy+2y^2=C$.
4. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$.
Ответ. $x^2-y^2=C$.
5. $\dfrac{dx}{2x^2-2xy+2y^2}=\dfrac{dy}{y^2-4xy}$.
Ответ. $2y^3-3xy^2+6x^2y=C$.
6. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.
Ответ. $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$.
7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$.
Ответ. $x(y^2-x^2)=Cxy^3$.

8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $P(1;\,0)$.

Ответ. $y=\dfrac{C}{2}x^2-\dfrac{1}{2C}$ $(C>0)$; $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$.

9. Найти кривую, у которой подкасательная есть среднее арифметическое координат точки касания.

Отв. $\frac{y}{y'}=\frac{x+y}{2}$, $(x-y)^2-Cy=0$.

10. Найти кривую, у которой в каждой точке длина отрезка касательной равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс.

Отв. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$, $x^2+y^2-Cy=0$.

§ 8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, разрешенное относительно производной y', вида

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \tag{1.30}$$

где P и Q — функции x или постоянные величины. Иными словами, линейное дифференциальное уравнение есть уравнение первой степени относительно одной из переменных (в данном случае y) и ее производной. Неизвестная функция y и ее производная входят линейно, т. е. в первой степени. При этом уравнение

$$\frac{dy}{dx}+Py=0, \tag{1.31}$$

в котором правая часть Q тождественно равна нулю, называется *однородным*, а уравнение (1.30), в котором правая часть $Q\not\equiv 0$, называется *неоднородным*.

Предположим, что функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b). Тогда через каждую точку $(x_0; y_0)$ полосы

$$a<x<b, \quad -\infty<y<+\infty$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.30), которая определена во всем интервале (a, b). Поэтому в задаче Коши для линейного уравнения x_0 — любое число из интервала (a, b), а y_0 — любое число.

Интегрирование линейного дифференциального уравнения производится с помощью подстановки Бернулли

$$y=uv, \tag{1.32}$$

откуда

$$dy=u\,dv+v\,du, \tag{1.32'}$$

где u и v — неизвестные функции x.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x),$$

или

$$dy+P(x)\,y\,dx=Q(x)\,dx.$$

Применяя подстановку Бернулли $y=uv$, в которой искомое общее решение представлено в виде произведения двух пока неизвестных еще функций $u(x)$ и $v(x)$, получаем

$$u\,dv+v\,du+P(x)\,uv\,dx=Q(x)\,dx. \tag{1.33}$$

Сгруппируем, например, второй и третий члены в левой части равенства:

$$u\,dv+v\,[du+P(x)\,u\,dx]=Q(x)\,dx. \tag{1.34}$$

Поставим теперь условие: найти такую функцию u, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль (такое требование обосновано, так как пока функция $u(x)$ является произвольной):

$$du+P(x)\,u\,dx=0. \tag{1.35}$$

После разделения переменных дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции u принимает вид

$$\frac{du}{u}=-P(x)\,dx. \tag{1.36}$$

Интегрируя, имеем

$$\ln u=-\int P(x)\,dx.$$

Потенцируя последнее равенство, находим искомую функцию:

$$u=e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{1.37}$$

Постоянную интегрирования здесь не пишем, так как достаточно будет какого-нибудь отличного от нуля решения дифференциального уравнения (1.36). Подставим найденную функцию u в уравнение (1.34). Так как в этом уравнении выражение в квадратных скобках равно нулю, получим

$$u\,dv=Q(x)\,dx,$$

или

$$e^{-\int P(x)\,dx}\,dv=Q(x)\,dx.$$

Из последнего уравнения имеем

$$dv=Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем вторую искомую функцию

$$v=\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C. \tag{1.38}$$

Подставляя найденные функции (1.37) и (1.38) в исходную подстановку Бернулли (1.32), получаем искомое общее решение

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+C\right]. \tag{1.39}$$

Однородное линейное дифференциальное уравнение всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $y\equiv 0$. Однако, оно не представляет практического интереса. Общее решение однородного линейного

дифференциального уравнения (1.31) в заданной полосе получается следующим образом. Уравнение (1.31) после разделения переменных имеет вид

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx,$$

откуда, интегрируя, получаем равенство

$$\ln y = -\int P(x)\,dx + C_1,$$

которое после потенцирования принимает вид

$$y = e^{-\int P(x)\,dx + C_1} = e^{-\int P(x)\,dx} e^{C_1}.$$

Полагая для краткости $e^{C_1} = C$, получаем общее решение однородного линейного дифференциального уравнения

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \tag{1.40}$$

или, в форме Коши,

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}. \tag{1.40'}$$

Существуют различные методы нахождения общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения. Рассмотрим некоторые из них.

1. Метод Лагранжа. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (1.30) находим с помощью общего решения соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения, варьируя в нем произвольную постоянную, т. е. считая ее некоторой непрерывно дифференцируемой функцией x. Так как общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид (1.40), то положим

$$y = C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}, \tag{1.41}$$

где $C(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция x. Для определения функции $C(x)$ подставляем выражение (1.41) в данное неоднородное линейное дифференциальное уравнение (1.30). Тогда производная выражения (1.41)

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\left[-\int P(x)\,dx\right]' =$$
$$= C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\,C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Далее имеем

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)\,C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} + P(x)\,C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

или, после сокращения,

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Выполняя очевидные преобразования, имеем

$$dC(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)\,dx,$$

или

$$dC(x) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Интегрируя, получаем

$$C(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C.$$

В результате подстановки полученного значения $C(x)$ в равенство (1.41), находим общее решение данного неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right], \tag{1.42}$$

которое совпадает с общим решением (1.39).

2. Метод Эйлера. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (1.30) находим, умножая это уравнение на интегрирующий множитель $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$. В результате имеем

$$\frac{dy}{dx}\,e^{\int P(x)\,dx} + P(x)\,ye^{\int P(x)\,dx} = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}.$$

Так как левая часть этого равенства представляет собой производную выражения $ye^{\int P(x)\,dx}$, то

$$\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right]' = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

или

$$d\left[ye^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\,e^{\int R(x)\,dx}\,dx + C,$$

откуда искомое общее решение

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]. \tag{1.43}$$

Общее решение (1.43) полностью совпадает с общим решением (1.39) и (1.42). Общее решение в форме Коши принимает вид

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{1.43'}$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $xy' - 3y = x^2$.

Решение. Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти соотношения в заданное дифференциальное уравнение, имеем

$$xu'v + xuv' - 3uv = x^2.$$

Объединяем второй и третий члены:

$$(xv' - 3v)\,u + xu'v = x^2.$$

Приравнивая выражение в скобках нулю, получаем

$$xv' - 3v = 0,$$

или

$$\frac{dv}{v} - 3\frac{dx}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования, опуская произвольную постоянную, имеем

$$\ln v = 3 \ln x.$$

Так как $\ln v = \ln x^3$, то потенцируя, находим

$$v = x^3.$$

При таком выборе функции v преобразованное дифференциальное уравнение запишется в виде

$$xu'x^3 = x^2, \text{ или } u'x^2 = 1.$$

Тогда

$$x^2\,du = dx \text{ и } du = \frac{dx}{x^2},$$

откуда, после интегрирования,

$$u = -\frac{1}{x} + C.$$

Искомое общее решение

$$y = uv = x^3\left(C - \frac{1}{x}\right) = Cx^3 - x^2.$$

Пример 2. Проинтегрировать методом вариации постоянных (методом Лагранжа) неоднородное дифференциальное уравнение

$$y' + y \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Сначала решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y' + y \operatorname{ctg} x = 0.$$

Имеем

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{ctg} x\,dx,$$

откуда, после интегрирования,

$$\ln y = -\ln \sin x + \ln C = \ln \frac{C}{\sin x}.$$

Потенцируя, получаем общее решение однородного уравнения:

$$y = \frac{C}{\sin x}.$$

Вместо постоянной C подставляем функцию x, т. е. $C(x)$. Тогда

$$y = \frac{C(x)}{\sin x}.$$

Дифференцируя полученное равенство, имеем

$$y' = \frac{\sin x C'(x) - C(x)\cos x}{\sin^2 x}.$$

Подставляя значения y и y' в заданное дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{C(x)}{\sin x}\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\frac{C'(x)}{\sin x} - \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

Принимая

$$-\frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} + \frac{C(x)\cos x}{\sin^2 x} = 0,$$

получаем

$$\frac{C'(x)}{\sin x} = \operatorname{tg} x, \quad \text{или} \quad C'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Интегрируя, находим

$$C(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \sin x + C_1.$$

Итак, общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{C(x)}{\sin x} = \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C_1}{\sin x} - 1.$$

Пример 3. Проинтегрировать методом Лагранжа (методом вариации постоянных) неоднородное дифференциальное уравнение

$$x(x^2 - 1)y' - (2x^2 - 1)y = -ax^3.$$

Решение. Разделим данное дифференциальное уравнение на $x(x^2 - 1)$:

$$y' - \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}y = -\frac{ax^3}{x(x^2 - 1)}.$$

Решим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}y = 0.$$

Имеем

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}\,dx.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{2(x^2-1)}\right] dx.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Выполняя интегрирование, находим

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \ln C = \ln Cx\sqrt{x^2-1}.$$

Потенцируя полученное равенство, получаем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y = Cx\sqrt{x^2-1}.$$

Для решения неоднородного дифференциального уравнения применяем метод вариации постоянных, полагая $C = C(x)$. Тогда

$$y = C(x)\,x\sqrt{x^2-1} = C(x)\,(x^4-x^2)^{1/2}.$$

Находим производную

$$y' = C'(x)\sqrt{x^4-x^2} + C(x)\cdot\frac{1}{2}(x^4-x^2)^{-1/2}(4x^3-2x) =$$

$$= C'(x)\,x\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Полученные выражения для y и y' подставляем в заданное неоднородное линейное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)\,x\sqrt{x^2-1} + C(x)\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}C(x)\,x\sqrt{x^2-1} = -\frac{ax^2}{x(x^2-1)}.$$

Полагая

$$C(x)\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}C(x)\,x\sqrt{x^2-1} = 0,$$

получаем

$$C'(x)\,x\sqrt{x^2-1} = -\frac{ax^2}{x(x^2-1)}.$$

Тогда

$$C'(x) = -\frac{ax^2}{x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{ax^2}{\sqrt{x^2-1}},$$

или

$$C(x) = -\int \frac{ax^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

С помощью подстановки $x^2-1=z$, $2x\,dx=dz$ приводим искомый интеграл к виду

$$C(x) = -\frac{a}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^3}} = -\frac{a}{2}\int z^{-3/2}\,dz = -\frac{a}{2}\frac{z^{-1/2}}{-1/2} + C_1 =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{z}} + C_1 = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + C_1.$$

Определив варьируемую постоянную, получаем общее решение заданного неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y=\left(\frac{a}{\sqrt{x^2-1}}+C_1\right)x\sqrt{x^2-1}=ax+C_1x\sqrt{x^2-1}=x\left(a+C_1\sqrt{x^2-1}\right).$$

Пример 4. Проинтегрировать методом Эйлера линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^3.$$

Решение. В данном случае $P(x)=\frac{2}{x}$; $Q(x)=x^3$, поэтому

$$\int P(x)\,dx=\int\frac{2dx}{x}=2\ln x=\ln x^2.$$

Следовательно, интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int P(x)\,dx}=e^{\ln x^2}=x^2.$$

Умножая данное дифференциальное уравнение на x^2 и дифференцируя, получаем

$$x^2\,dy+2xy\,dx=x^5\,dx.$$

Поскольку в левой части равенства образовался дифференциал x^2y, то

$$d(x^2y)=x^5\,dx,$$

или, после интегрирования,

$$x^2y=\frac{1}{6}x^6+C.$$

Общее решение имеет вид

$$y=\frac{x^4}{6}+\frac{C}{x^2}.$$

Задача 1. Конденсатор, емкость которого Q, включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. В момент t заряд конденсатора равен q и сила тока $i=\frac{dq}{dt}$. К этому моменту времени в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора q/Q:

$$E=U-\frac{q}{Q}.$$

По закону Ома сила тока $i=\frac{E}{R}$ или

$$\frac{dq}{dt}=\frac{U-q/Q}{R}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$R\frac{dq}{dt}=U-\frac{q}{Q}.$$

Интегрируя полученное линейное дифференциальное уравнение, находим общее решение

$$q=QU-Ce^{-\frac{t}{QR}}.$$

Согласно начальным условиям при $t=0$, $q=0$. Отсюда

$$0=QU-Ce^{-\frac{0}{QR}}$$

и

$$C=QU.$$

Итак, рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$q=QU\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

Задача 2. В цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L действует периодическая электродвижущая сила $E_1=a\sin\frac{2\pi}{T}t$ (где T — период, t — время, a — постоянное число, равное, очевидно, максимальному значению величины E_1). Определить силу тока i в цепи в любой момент времени, если в начальный момент ($t=0$) сила тока равна нулю.

Решение. В цепи действуют две силы: электродвижущая сила

$$E_1=a\sin\frac{2\pi}{T}t$$

и противоположная ей электродвижущая сила индукции

$$E_2=-L\frac{di}{dt}.$$

Общая электродвижущая сила

$$E=E_1+E_2=a\sin\frac{2\pi}{T}t-L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома сила тока в цепи $i=\frac{E}{R}$. Таким образом,

$$i=\frac{a\sin\frac{2\pi}{T}t-L\frac{di}{dt}}{R}.$$

Обозначая для краткости $\frac{2\pi}{T}=k$, получим дифференциальное уравнение процесса:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=a\sin kt. \qquad (*)$$

Это уравнение является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0, \text{ или } \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln C.$$

Потенцируя обе части равенства, получим

$$i = Ce^{-\frac{R}{L} t}.$$

Частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (*) ищем в виде

$$i^* = A \sin kt + B \cos kt. \qquad (**)$$

Определим коэффициенты A и B. Продифференцируем последнее равенство, считая A и B постоянными:

$$\frac{di^*}{dt} = Ak \cos kt - Bk \sin kt. \qquad (***)$$

Подставляя значения (***) и (**) в уравнение (*), после очевидных алгебраических преобразований имеем

$$\left(A \frac{R}{L} - Bk\right) \sin kt + \left(Ak + B \frac{R}{L}\right) \cos kt = \frac{a}{L} \sin kt.$$

Приравнивая коэффициенты обеих частей этого равенства, получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A \frac{R}{L} - Bk &= \frac{a}{L}; \\ Ak + B \frac{R}{L} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

решая которую относительно неизвестных A и B, находим

$$A = \frac{aR}{k^2L^2 + R^2}; \quad B = -\frac{akL}{k^2L^2 + R^2}.$$

Итак, частное решение

$$i^* = \frac{aR}{k^2L^2 + R^2} \sin kt - \frac{akL}{k^2L^2 + R^2} \cos kt.$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (*) таково:

$$i = Ce^{-\frac{R}{L} t} + \frac{aR}{k^2L^2 + R^2} \sin kt - \frac{akL}{k^2L^2 + R^2} \cos kt.$$

Постоянную интегрирования C определим из начальных условий (при $t=0$ $i=0$). Имеем

$$0 = Ce^{-\frac{R}{L}\cdot 0} + \frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin k\cdot 0 - \frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos k\cdot 0;$$

$$C = \frac{akL}{k^2L^2+R^2}.$$

Подставляя последнее выражение в общее решение, окончательно имеем

$$i = \frac{a}{k^2L^2+R^2}\left(kLe^{-\frac{Rt}{L}} + R\sin kt - kL\cos kt\right).$$

Упражнения

Проинтегрировать линейные дифференциальные уравнения:

1. $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.
Отв. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.
2. $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$.
Отв. $y = (1+x^2)(C+x)$.
3. $(1+x)\,y' + y = \cos x$.
Отв. $y = \dfrac{C+\sin x}{1+x}$.
4. $y' + \dfrac{1}{x}y = 4x^2$.
Отв. $y = \dfrac{C}{x} + x^3$.
5. $y' + y = e^x$.
Отв. $y = Ce^{-x} + \dfrac{e^x}{2}$.
6. $y' + 2xy = 2x^3$.
Отв. $y = Ce^{-x^2} + x^2 - 1$.
7. $(x-1)\,y' + xy = e^{-x}$.
Отв. $e^x(x-1)\,y = x + C$.
8. $y + (\operatorname{ctg} x)\,y = 3\sin x\cos x$.
Отв. $y = C\operatorname{cosec} x + \sin^2 x$.
9. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.
Отв. $ye^{\sin x} = C + x$.
10. $2x\,dy = (2x^3 - y)\,dx$.
Отв. $y = \dfrac{2x^3}{7} + \dfrac{C}{\sqrt{x}}$.
11. $y' + 2xy + x = e^{-x^2}$.
Отв. $(2y+1)\,e^{x^2} = C + 2x$.
12. $\cos y\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\sin y}{x} = \sin 2x$.
Отв. $4x\sin y + 2x\cos 2x = C + \sin 2x$.
13. Решить дифференциальное уравнение

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$$

при начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
Отв. $y = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$.
14. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянная и равна a^2.
Отв. $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2a^2}{y^2}$;
$x = Cy + \dfrac{a^2}{y}$.

§ 9. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальное уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \qquad (1.44)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — определенные и непрерывные функции; n — постоянная, отличная от 0 и 1 (так как при $n=0$ или $n=1$ уравнение Бернулли обращается в линейное дифференциальное уравнение).

Для того чтобы проинтегрировать уравнение Бернулли, необходимо привести его к линейному дифференциальному уравнению. Для этого разделим дифференциальное уравнение (1.44) на y^n:

$$y' \frac{1}{y^n} + P(x) y^{1-n} = Q(x). \tag{1.45}$$

Введем новую переменную

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-n+1} = y^{1-n},$$

откуда

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \text{ и } y^n = z^{\frac{n}{1-n}}.$$

Кроме того, производная

$$y' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{1}{1-n}-1} z' = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z'.$$

Подставляя значения y, y^n и y' в дифференциальное уравнение (1.45), получим

$$\frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} z' \frac{1}{z^{\frac{n}{1-n}}} + P(x) z = Q(x),$$

или вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{1-n} z' + P(x) z = Q(x). \tag{1.46}$$

Последнее уравнение в дифференциальной форме $\left(z' = \frac{dz}{dx}\right)$ имеет вид

$$dz + (1-n) P(x) z\, dz = (1-n) Q(x)\, dx. \tag{1.47}$$

Уравнение (1.47) решаем как линейное дифференциальное уравнение относительно z, применяя подстановку Бернулли

$$z = uv, \text{ откуда } dz = u\, dv + v\, du. \tag{1.48}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.47) принимает вид

$$u\, dv + v\, du + (1-n) P(x) uv\, dx = (1-n) Q(x)\, dx,$$

или

$$u\, dv + v[du + (1-n) P(x) u\, dx] = (1-n) Q(x)\, dx. \tag{1.49}$$

Предположим, что

$$du + (1-n) P(x) u\, dx = 0, \tag{1.50}$$

откуда

$$du = (n-1) P(x) u\, dx,$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{du}{u} = (n-1) P(x)\, dx.$$

Первообразную функцию находим интегрированием обеих частей этого уравнения:

$$\ln u = (n-1)\int P(x)\,dx.$$

Потенцируя и учитывая, что $e^{\ln u} = u$, получаем

$$u = e^{(n-1)\int P(x)\,dx}. \tag{1.51}$$

Учитывая условия (1.50), запишем дифференциальное уравнение (1.49) в виде

$$u\,dv = (1-n)\,Q(x)\,dx,$$

откуда

$$dv = (1-n)\,Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx = (1-n)\,Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx. \tag{1.52}$$

В результате интегрирования последнего дифференциального уравнения имеем

$$v = (1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx + C. \tag{1.53}$$

Применяя подстановку (1.47) и учитывая равенства (1.51) и (1.53), получаем общее решение вспомогательного дифференциального уравнения (1.46):

$$z = uv = e^{(n-1)\int P(x)\,dx}\left[(1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]. \tag{1.54}$$

Переходим к исходной переменной $y = z^{\frac{1}{1-n}}$. Имеем

$$y = \left[e^{(n-1)\int P(x)\,dx}\right]^{\frac{1}{1-n}}\left[C + (1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx\right].$$

После очевидных алгебраических преобразований получаем общее решение дифференциального уравнения Бернулли:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C + (1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{1.55}$$

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение Бернулли

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Решение. Разделим обе части данного дифференциального уравнения на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3,$$

или

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Пусть

$$y^{-1} = z, \text{ откуда } z' = -y^{-2}y'.$$

Умножим обе части последнего уравнения на (—1):

$$-y^{-2}y' + 2xy^{-1} = -2x^3.$$

Применяя подстановку, получим

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение как линейное относительно новой переменной z:

$$dz + 2xz\,dx = -2x^3\,dx.$$

Применяем подстановку Бернулли $z = uv$, откуда $dz = u\,dv + v\,du$. Тогда

$$u\,dv + v\,du + 2xuv\,dx = -2x^3\,dx,$$

или

$$u\,dv + v\,(du + 2xu\,dx) = -2x^3\,dx. \qquad (*)$$

Пусть

$$du + 2xu\,dx = 0, \text{ откуда } du = -2xu\,dx,$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{du}{u} = -2x\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\ln u = -x^2,$$

или

$$u = e^{-x^2}. \qquad (**)$$

С другой стороны, уравнение (*) можно привести к виду

$$u\,dv = -2x^3\,dx,$$

откуда

$$dv = -2e^{x^2}x^3\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$v = -2\int e^{x^2}x^3\,dx = -2\int e^{x^2}x^2x\,dx = -\int x^2e^{x^2}\,d(x^2).$$

Интегрируя последний интеграл по частям, имеем

$$v = -\int x^2e^{x^2}\,d(x^2) = -\left(x^2e^{x^2} - \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx\right) =$$

$$= \int e^{x^2}\,d(x^2) - x^2e^{x^2} = e^{x^2} - x^2e^{x^2} + C = e^{x^2}(1 - x^2) + C. \qquad (***)$$

Определим значения искомых функций u и v. Согласно принятой подстановке

$$z = uv = e^{-x^2}\left[e^{x^2}(1 - x^2) + C\right] = Ce^{-x^2} + 1 - x^2.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения Бернулли:

1. $y'+2xy=2x^3y^3$.

Отв. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$.

2. $3y^2y'+y^3+x=0$.

Отв. $y^3=Ce^{-x}-x+1$.

3. $y'=\frac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$.

Отв. $x^2=Ce^{\sin y}-2a(\sin y+1)$.

4. $dy=(xy^2+3xy)\,dx$.

Отв. $Cy+(y+3)e^{\frac{3x^2}{2}}=0$.

5. $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Отв. $y=x^4\left[\ln\sqrt{x}+C\right]^2$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения и найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку:

6. $xy'+y=y^2\ln x$; $x_0=1$, $y_0=1$.

Отв. $\frac{1}{y}=Cx+\ln x+1$; $\frac{1}{y}=\ln x+1$.

7. $y'-y=xy^2$; $x_0=0$, $y_0=0$.

Отв. $\frac{1}{y}=Ce^{-x}-x+1$; $y=0$.

8. $xy'+y=-x^2y^2$; $x_0=1$, $y_0=1$.

Отв. $y=\frac{1}{Cx+x^2}$; $y=\frac{1}{x^2}$.

9. $y'=\frac{y}{x}-2xy^2$; $x_0=1$; $y_0=1$.

Отв. $y=\frac{3x}{2x^3+3C}$; $y=\frac{3x}{2x^3+1}$.

10. $2x^2y'-4xy=y^2$; $x_0=1$, $y_0=1$.

Отв. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{y}=C$; $y=\frac{2x^2}{3-x}$.

11. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

Отв. $yy'=\frac{x^2+y^2}{2}$; $y^2=Ce^x-x^2-2x-2$ $(C>0)$.

12. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси ординат равен $\frac{x^2}{y}$.

Отв. $y+\frac{x}{y'}=\frac{x^2}{y}$; $y^2e^{\frac{x^2}{y^2}}=C$.

13. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату ординаты точки касания.

Отв. $y-xy'=y^2$; $y=\frac{x}{x+C}$.

§ 10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Если в дифференциальном уравнении

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1.56}$$

левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ от независимых переменных x и y, то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*. Иными словами, дифференциальное уравнение (1.56) является уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $U(x, y)$, что

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv dU(x, y).$$

В этом случае дифференциальное уравнение (1.56) можно представить в виде

$$dU(x, y) = 0, \tag{1.57}$$

и его общий интеграл

$$U(x, y) = C. \tag{1.58}$$

Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные по y и по x. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение (1.56) было дифференциальным уравнением в полных дифференциалах является выполнение тождества

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.59}$$

Если это условие выполнено, то общий интеграл можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C, \tag{1.60}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = C, \tag{1.61}$$

где точка $(x_0; y_0)$ принадлежит области D. Здесь интегрирование производилось по одной из переменных, другая переменная являлась параметром.

Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 в области D, при условии, что в точке $(x_0; y_0)$ функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются одновременно в нуль, получается из общего интеграла (1.60) или (1.61) при $C = 0$:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = 0, \tag{1.62}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.63}$$

Если дифференциальное уравнение (1.56)

$$M\,dx+N\,dy=0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, но существует такая дифференцируемая функция $M=M(x, y)$, что уравнение

$$\mu\,(M\,dx+N\,dy)=0 \tag{1.64}$$

уже представляет собой дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, так что

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}, \tag{1.65}$$

то эта функция называется *интегрирующим множителем* дифференциального уравнения (1.56).

Если интегрирующий множитель μ определен, то интегрирование дифференциального уравнения сводится к умножению его на μ и определению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах. Из уравнения (1.65) следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{1.66}$$

Определение интегрирующего множителя не всегда возможно.

Если заранее известно, что $\mu=\mu(\nu)$, где ν — заданная функция x и y, то уравнение (1.66) приводится к линейному дифференциальному уравнению с неизвестной (искомой) функцией μ от аргумента ν:

$$\frac{d\mu}{d\nu}=\varphi(\nu)\,\mu, \tag{1.67}$$

где

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\nu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\nu}{\partial y}}\equiv\varphi(\nu). \tag{1.68}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (1.67), находим

$$\mu=e^{\int\varphi(\nu)\,d\nu}. \tag{1.69}$$

В частных случаях, если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\varphi(x),\quad\text{то}\quad\mu=e^{\int\varphi(x)\,dx}; \tag{1.70}$$

если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\varphi(y),\quad\text{то}\quad\mu=e^{\int\varphi(y)\,dy}. \tag{1.71}$$

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0.$$

Р е ш е н и е. В данном дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy \quad \text{и} \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = (6x^2y + 4y^3)'_x = 12xy,$$

т. е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy,$$

следовательно, это уравнение является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Группируя члены в левой части данного дифференциального уравнения, получим

$$3x^2\,dx + 6xy\,(y\,dx + x\,dy) + 4y^3\,dy = 0.$$

Так как

$$3x^2\,dx = d\,(x^3),$$

$$6xy\,(y\,dx + x\,dy) = 6xy\,d\,(xy) = d\,[3\,(xy)^2]$$

и

$$4y^3\,dy = d\,(y^4),$$

то данное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$d\,(x^3) + d\,[3\,(xy)^2] + d\,(y^4) = 0,$$

или

$$d\,(x^3 + 3x^2y^2 + y^4) = 0,$$

т. е. дифференциальное уравнение приведено к виду $dU = 0$. Общий интеграл дифференциального уравнения

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1 - x^2y)\,dx + x^2\,(y - x)\,dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Это дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель μ, зависящий только от x, так как выполняется условие

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2\,(y - x)} = -\frac{2}{x} \equiv \varphi\,(x).$$

Поэтому

$$\mu = e^{\int \varphi\,(x)\,dx} = e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{e^{2\ln x}} = \frac{1}{(e^{\ln x})^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножая данное дифференциальное уравнение на интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x^2}$, получаем дифференциальное уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0.$$

Группируя члены в левой части этого дифференциального уравнения, имеем

$$\frac{dx}{x^2} - (y\,dx + x\,dy) + y\,dy = 0.$$

Так как

$$\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x}\right), \quad y\,dx + x\,dy = d(xy)$$

и

$$y\,dy = d\left(\frac{y^2}{2}\right),$$

то данное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$d\left(-\frac{1}{x}\right) - d(xy) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0,$$

или

$$d\left(\frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Последнее равенство умножаем на 2, тогда

$$d\left(y^2 - 2xy - \frac{2}{x}\right) = 0.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения

$$y^2 - 2xy - \frac{2}{x} = C.$$

Упражнения

Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

1. $x\,dx + y\,dy = 0.$
Отв. $x^2 + y^2 = C^2.$
2. $\frac{1}{x}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx = 0.$
Отв. $\frac{y}{x} = C.$
3. $\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0.$
Отв. $\frac{x}{y} = C.$
4. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0.$
Отв. $x^2 + y^2 - xy + x - y = C.$
5. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$
Отв. $\sqrt{x^2 - y^2} - x = C.$

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

6. $\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$
Отв. $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$
7. $(x^3 + 5xy^2)\,dx + (5x^2y + 2y^3)\,dy = 0.$
Отв. $x^4 + 10x^2y^2 + 2y^4 = C.$

8. $(5xy^4+x)\,dx-(2+3y^2-10x^2y^3)\,dy=0$.
Отв. $5x^2y^4+x^2-2y^3-4y=C$.
9. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}=0$$

при начальных условиях $x_0=1$, $y_0=0$.

Отв. $\ln(x+y)-\frac{y}{x+y}=C$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, имеющие интегральные множители вида $\mu=\mu(x)$ и $\mu=\mu(y)$:

10. $\frac{1}{x}(2x-y^3)\,dx-3y^2\,dy=0$.
Отв. $x^2-xy^3=C$.
11. $y\,dx+(x+x^2y^2)\,dy=0$.
Отв. $xy^3-1=Cxy$.
12. $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$.
Отв. $x^2-y^2+2xy=C$.
13. $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0$.
Отв. $x-\frac{y}{x}=C$.
14. $(xy^2+y)\,dx-x\,dy=0$.
Отв. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C$.
15. $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$.
Отв. $e^x(x\sin y-\sin y+y\cos y)=C$.

§ 11. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Уравнения Лагранжа и Клеро являются дифференциальными уравнениями типа

$$y=\varphi(x,\ y')\quad\text{или}\quad x=\psi(y,\ y'),$$

неразрешенными относительно производной искомой функции.

Уравнение Лагранжа. *Уравнение Лагранжа* имеет вид

$$y=f(y')\,x+g(y'),\tag{1.72}$$

причем

$$g(y')\not\equiv y'.$$

Здесь $f(y')$ и $g(y')$ — функции y'. В дифференциальном уравнении Лагранжа y является линейной функцией x с коэффициентами, зависящими от y'.

Дифференциальное уравнение (1.72) интегрируется с помощью подстановки

$$y'=\frac{dy}{dx}=p,\tag{1.73}$$

где p — параметр. Тогда, заменяя в уравнении (1.72) производную y' через p, имеем

$$y=f(p)\,x+g(p).\tag{1.74}$$

Величина p рассматривается как вспомогательная переменная. Дифференциал выражения (1.74)

$$dy = x\,df(p) + f(p)\,dx + dg(p) = xf'(p)\,dp + f(p)\,dx + g'(p)\,dp. \quad (1.75)$$

Согласно равенству (1.73) $dy = p\,dx$. Подставляя полученное значение в левую часть уравнения (1.75), имеем

$$p\,dx = f(p)\,dx + [xf'(p) + g'(p)]\,dp,$$

откуда

$$[p - f(p)]\,dx - [f'(p)\,x + g'(p)]\,dp = 0.$$

Разделим последнее равенство на dp и $p - f(p)$:

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - f'(p)\,x - g'(p) = 0,$$

или

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}. \quad (1.76)$$

Это линейное дифференциальное уравнение относительно искомой функции x.

Как известно [см. формулу (1.39)], общее решение этого линейного дифференциального уравнения

$$x = e^{\int \frac{f'(p)\,dp}{p - f(p)}}\left[C + \int \frac{g'(p)}{p - f(p)}\,e^{-\int \frac{f'(p)\,dp}{p - f(p)}}\,dp\right]. \quad (1.77)$$

Исключая из общего решения (1.77) и дифференциального уравнения (1.76) p, получаем общее решение данного дифференциального уравнения (1.72).

Если уравнение $p - f(x) = 0$ имеет действительные решения $p = p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то, подставляя их в дифференциальное уравнение (1.72) и принимая во внимание, что $f(p_i) = p_i$, получим

$$y = p_i x + g(p_i). \quad (1.78)$$

Эти прямые могут оказаться особыми решениями дифференциального уравнения (1.72)

Уравнение Клеро. *Уравнение Клеро* имеет вид

$$y = xy' + g(y'). \quad (1.79)$$

Это дифференциальное уравнение является частным случаем уравнения Лагранжа и отличается от последнего тем, что в нем коэффициент при x равен y', а не функции от y'. Пусть $y' = p$. Тогда уравнение (1.79) принимает вид

$$y = xp + g(p). \quad (1.80)$$

Выполняя преобразования, имеем

$$p\,dx + [x + g'(p)]\,dp = p\,dx,$$

или

$$[x + g'(p)]\,dp = 0. \quad (1.81)$$

Уравнение (1.81) распадается на два уравнения:

$$dp=0 \quad \text{и} \quad x+g'(p)=0.$$

Из уравнения $dp=0$ следует, что $p=C$. Подставляя это значение в уравнение (1.80), получаем общее решение уравнения Клеро

$$y=xC+g(C). \tag{1.82}$$

Особое решение это такое решение дифференциального уравнения, которое не получается из общего интеграла (решения) ни при каком частном значении произвольной постоянной C.

Уравнение $x+g'(p)=0$ и уравнение (1.80) образуют систему

$$\left.\begin{aligned} x+g'(p)&=0,\\ y&=xp+g(p). \end{aligned}\right\} \tag{1.83}$$

Исключая из этой системы p, находим особое решение. Геометрически особое решение представляет собой огибающую семейства прямых, образующих общее решение.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение Лагранжа $y=2xy'-y'^2$.

Решение. Пусть $y'=p$. Тогда заданное уравнение можно записать в виде

$$y=2xp-p^2.$$

Так как $dy=y\,dx=p\,dx$, то

$$dy=2(p\,dx+x\,dp)-2p\,dp,$$

или

$$p\,dx=2p\,dx+(2x-2p)\,dp.$$

Отсюда

$$p\,dx+(2x-2p)\,dp=0.$$

Разделив на $p\,dp$, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=2.$$

Общее решение этого уравнения

$$x=e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left(C+2\int e^{2\int\frac{dp}{p}}dp\right)=e^{-2\ln p}\left(C+2\int e^{2\ln p}dp\right)=$$
$$=p^{-2}\left(C+2\int p^2\,dp\right)=\frac{1}{p^2}\left(C+\frac{2}{3}p^3\right)=\frac{C}{p^2}+\frac{2}{3}p.$$

Подставляя найденное общее решение в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$y=2xp-p^2=2\left(\frac{C}{p^2}+\frac{2}{3}p\right)p-p^2=\frac{2C}{p}+\frac{p^2}{3}.$$

Подставляем $p=0$ (значение знаменателя, при котором первая дробь обращается в бесконечность) в равенство

$$y=2xp-p^2$$

и получаем частное решенне

$$y=0.$$

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение Клеро

$$y=xy'+y'^2.$$

Решение. Заменяя в данном уравнении производную y' на C, получаем общее решенне

$$y=xC+C^2.$$

Огибающую этого семейства находим, используя систему (1.83):

$$\left.\begin{aligned} y&=xC+C^2,\\ 0&=x+2C,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x&=-2C,\\ y&=-C^2.\end{aligned}\right\}$$

Из первого уравнения системы находим $C=-\frac{x}{2}$. Подставляя это значение во второе уравнение системы, получаем особое решение

$$y=-\frac{x^2}{4},$$

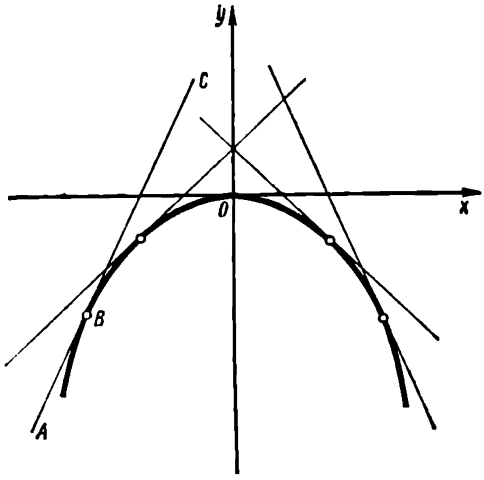


Рис. 17

которое графически представляет собой огибающую семейства

$$y=xC+C^2.$$

Интегральными кривыми заданного дифференциального уравнения являются парабола $y=-\frac{x^2}{4}$ и возможные касательные к ней (рис. 17). Интегральной кривой является также всякая кривая ABC, составленная из дуги параболы $y=-\frac{x^2}{4}$ и касательной к ней.

Задача. Дана плоская кривая $y=y(x)$, касательная и нормаль в точке $P(x;\ y)$ которой пересекают в точках T и N ось абсцисс (рис. 18). Найти дифференциальное уравнение кривой, зная, что $\overline{OT}\cdot\overline{ON}=a^2$, где a — постоянная. Через точку $A\left(a;\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ провести две кривые семейства и найти их уравнения.

Решение. Уравнения касательной и нормали кривой в точке $P(x; y)$ в дифференциальной форме имеют вид

$$Y-y=y'(X-x), \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

Решая эти уравнения, можно найти координаты точек пересечения T и N, находящихся на этих прямых (следовательно, координаты этих точек должны удовлетворять уравнениям). Точка T также лежит на оси абсцисс и поэтому ее ордината $Y_T=0$. Подставляя это значение в уравнение касательной, имеем

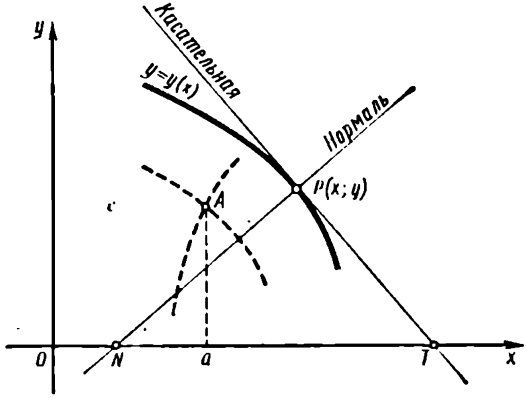


Рис. 18

$$0-y=y'(X_T-x),$$

или

$$X_Ty'=xy'-y,$$

откуда

$$X_T=x-\frac{y}{y'}.$$

Точка N также находится на оси абсцисс, поэтому ее ордината $Y_N=0$. Подставляя это значение в уравнение нормали, имеем

$$0-y=-\frac{1}{y'}(X_N-x),$$

или

$$\frac{1}{y'}X_N=y+\frac{x}{y'},$$

откуда

$$X_N=yy'+x.$$

Итак, получены точки $T\left(x-\frac{y}{y'}; 0\right)$ и $N(yy'+x; 0)$. Согласно условию задачи $OT\cdot ON=a^2$. Подставляя найденные абсциссы точек T и N, получаем

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)(x+yy')=a^2,$$

или

$$(x^2-y^2-a^2)y'+xy(y'^2-1)=0.$$

Записывая производную в дифференциальном виде и выполняя умножение во втором члене полученного равенства, получим дифференциальное уравнение первого порядка второй степени

$$(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-xy=0.$$

Второй член полученного уравнения можно представить в виде

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x}{y}\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)^2=\frac{xx^2}{y}\left(\frac{y\,dy}{x\,dx}\right)^2=\frac{x^3}{y}\left(\frac{y\,dy}{x\,dx}\right)^2.$$

Тогда уравнение

$$(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{y}\left(\frac{y\,dy}{x\,dx}\right)^2-xy=0$$

после почленного умножения на $\frac{y}{x}$, принимает вид

$$(x^2-y^2-a^2)\frac{y\,dy}{x\,dx}+x^2\left(\frac{y\,dy}{x\,dx}\right)^2-y^2=0.$$

Пусть $x^2=u$ и $y^2=v$, откуда $2x\,dx=du$, $2y\,dy=dv$. Тогда последнее уравнение можно записать в виде

$$(u-v-a^2)\frac{dv}{du}+u\left(\frac{dv}{du}\right)^2-v=0,$$

или

$$(u-v-a^2)\,v'+u\,(v')^2-v=0.$$

Выполняя преобразования, имеем

$$uv'-vv'-a^2v'+u\,(v')^2-v=0$$

и

$$uv'-a^2v'+u\,(v')^2=v+vv',$$

или

$$v\,(1+v')=uv'\,(1+v')-a^2v',$$

откуда

$$v=uv'-a^2\frac{v'}{1+v'}.$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением Клеро. Заменяя производную v' на C, получаем общее решение данного дифференциального уравнения:

$$v=uC-a^2\frac{C}{1+C},$$

или, переходя к исходным переменным,

$$y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$Cx^2-y^2=\frac{a^2C}{1+C}$$

и разделим почленно на свободный член. Тогда искомое уравнение семейства кривых имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{1+C}}-\frac{y^2}{\frac{a^2C}{1+C}}=1.$$

Согласно условию интегральная кривая проходит через точку $A\left(a; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, поэтому координаты точки A должны удовлетворять полученному уравнению. После подстановки координат точки A получаем уравнение относительно C:

$$2C^2 - C - 1 = 0,$$

корни которого $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 1$. Значению $C_1 = -\frac{1}{2}$ соответствует эллипс

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

значению $C_2 = 1$ — гипербола

$$\frac{x^2}{a^2/2} - \frac{y^2}{a^2/2} = 1.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

Отв. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; $y = \pm 2x$.

2. $y = -xy' + y'^2$.

Отв. $x = \frac{C}{p} - p$; $y = -xp + p^2$.

3. $y = xy' - y'^2$.

Отв. $y = Cx - C^2$; $y = \frac{x^2}{4}$.

4. $2xy' + y'^3 = y$.

Отв. $x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2$; $y = 2px + p^2$.

5. $y = yy'^3 + 2xy'$.

Отв. $3Cx = C^2 - y^2$.

6. Найти кривую, касательные к которой образуют на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

Отв. $y = xy' + \frac{2ay'}{y' - 1}$; $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

7. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

Отв. $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}$; $xy = a^2$.

§ 12. МЕТОД АДАМСА—КРЫЛОВА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для решения многих технических задач необходимо решить дифференциальное уравнение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, т. е. решить задачу Коши.

Однако, на практике интегрирование дифференциальных уравнений в конечном виде возможно лишь в отдельных случаях. Очень часто встречаются и такие дифференциальные уравнения первого

порядка, решение которых не сводится к квадратурам, т. е. к нахождению интегралов от известных функций. Для решения подобного рода дифференциальных уравнений широко используется приближенное интегрирование. Одним из наиболее эффективных методов быстрого получения достаточно точных решений дифференциальных уравнений является метод Адамса — Крылова, в котором приближенное интегрирование основано на интерполяции * функций, т. е. на приближенном вычислении значений функции $f(x)$ по нескольким отдельным данным ее значениям $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$.

Итак, *интерполяцией функции* называется нахождение значений функции $f(x)$ в точках x, лежащих *между* точками $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, в которых значение функции известно. В случае, если x лежит *вне* интервала, заключенного между x_0 и x_n, аналогичная задача называется *экстраполяцией*. Приведем основные сведения об интерполяции функций.

1. Интерполяция функций. Задача интерполяции (интерполирования) формулируется так: найти для данной функции $f(x)$ многочлен возможно низшей степени m

$$Q_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x), \qquad (1.84)$$

где c_0, c_1, c_2, ..., c_m — постоянные коэффициенты, принимающий в заданных точках x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) те же значения, что и функция $f(x)$, т. е. такой, что

$$Q_m(x_i) = f(x_i). \qquad (1.85)$$

В этом случае аппроксимирующий (приближающий) к функции $f(x)$ многочлен $Q_m(x)$ называется *интерполяционным*, а процесс нахождения и вычисления значений $Q_m(x)$ — *интерполяцией*. Наиболее применима параболическая интерполяция, когда в качестве интерполяционного многочлена берется многочлен

$$Q_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m, \qquad (1.86)$$

графиком которого является парабола m-й степени.

В случае параболической интерполяции

$$\varphi_0(x) = 1, \ \varphi_1(x) = x, \ \varphi_2(x) = x^2, \ \ldots, \ \varphi_m(x) = x^m,$$

т. е. основная система многочлена (1.84) состоит из целых неотрицательных степеней переменной x.

Пусть функция $y = f(x)$ при значениях аргумента $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ принимает значения

$$y_0 = f(x_0), \ y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2), \ \ldots, \ y_n = f(x_n).$$

---

* Этот латинский термин в переводе означает «вставление внутрь».

Задача параболической интерполяции состоит в построении многочлена $Q_n(x)$ степени n, значения которого совпадают со значениями функции $f(x)$ в заданных точках:

$$\begin{aligned} Q_n(x_0) &= f(x_0) = y_0, \\ Q_n(x_1) &= f(x_1) = y_1, \\ Q_n(x_2) &= f(x_2) = y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n(x_n) &= f(x_n) = y_n. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Точки x_0, x_1, x_2, ..., x_n называют *узлами интерполяции*. С геометрической точки зрения надо построить параболу n-го порядка с вертикальной осью. Эта парабола пересекается с графиком функции

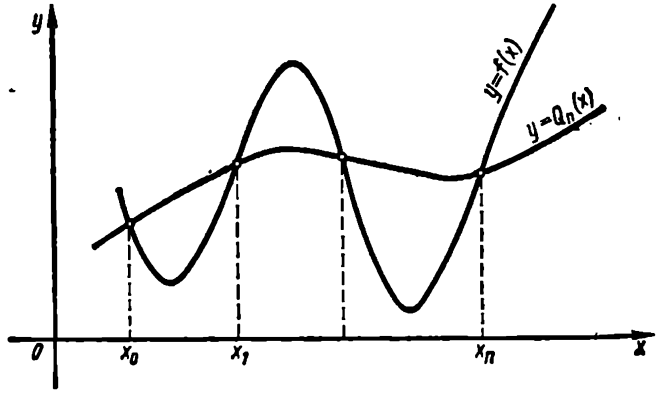


Рис. 19

$y = f(x)$ в $(n+1)$-й наперед заданной точке (рис. 19). Здесь точка с абсциссой x_n является $(n+1)$-й, так как первой точкой является x_0, т. е. всего будет $n+1$ узлов интерполяций.

Докажем, что существует единственный многочлен степени не выше n, принимающий в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_n заданные значения (1.87). Допустим противное: существуют два многочлена

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

и

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

удовлетворяющие условиям (1.87), причем $Q_n(x) \not\equiv P_n(x)$.

Рассмотрим равенство

$$Q_n(x) - P_n(x) = 0. \tag{1.88}$$

Подставляя правые части многочленов, имеем

$$(a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)x + (a_2 - c_2)x^2 + \ldots + (a_n - c_n)x^n = 0. \tag{1.89}$$

С одной стороны, уравнение (1.89) является уравнением n-й степени, т. е. степень этого уравнения не выше n, и оно не может иметь

более чем n действительных корней. С другой стороны, так как многочлены $Q_n(x)$ и $P_n(x)$ должны удовлетворять условиям (1.87), то

$$\begin{array}{ll} Q_n(x_0)=f(x_0)=y_0, & P_n(x_0)=f(x_0)=y_0, \\ Q_n(x_1)=f(x_1)=y_1, & P_n(x_1)=f(x_1)=y_1, \\ Q_n(x_2)=f(x_2)=y_2, & P_n(x_2)=f(x_2)=y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n(x_n)=f(x_n)=y_n, & P_n(x_n)=f(x_n)\equiv y_n, \end{array}$$

т. е. равенство (1.88) при $n+1$ значениях аргумента $x=x_0$, $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_n$ обращается в тождество

$$Q_n(x)-P_n(x)=f(x)-f(x)=y-y\equiv 0.$$

Аналогично и равенство (1.89) обращается в тождество при $n+1$ значениях аргумента, т. е. имеет $n+1$ корней. Это противоречит сделанному ранее выводу о том, что уравнение (1.89) не может иметь более n действительных корней. Полученное противоречие приводит к выводу о неверности предположения

$$Q_n(x)\not\equiv P_n(x).$$

Таким образом, единственно возможным является тождество

$$Q_n(x)\equiv P_n(x),$$

что и доказывает существование единственного многочлена $Q_n(x)$, удовлетворяющего условиям (1.87), который является решением задачи параболической интерполяции.

Вернемся к многочлену (1.86). Поскольку существует единственный многочлен степени не выше n, принимающий в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_n заданные значения, то для многочлена (1.86) можно положить $m=n$.

Коэффициенты a_i многочлена $Q_n(x)$ можно определить из системы $n+1$ алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными коэффициентами:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0, \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n, \end{array}\right\} \qquad (1.90)$$

где $y_i=f(x_i)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.
Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n}(x_q-x_p)\neq 0, \qquad (1.91)$$

следовательно, система (1.90) имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера. Здесь символ $\prod$ означает сумму произведений.

Очень часто точки разбиения (интерполяционные узлы) находятся на равном расстоянии. В этом случае величина $h = x_{i+1} - x_i$ называется *шагом* заданной таблицы значений функции $f(x)$. Узлы интерполяции образуют арифметическую прогрессию

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh. \tag{1.92}$$

Для нахождения искомой аналитической зависимости интервал изменения независимой переменной x разбивают на n равных частей и в точках разбиения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ находят значения функции $y = f(x): y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Полученные значения обычно заносятся в таблицы. Во многих случаях важно знать разности соседних в таблице значений функций. Эти разности называются *табличными разностями* и обозначаются Δy.

Разностью или *конечной разностью первого порядка* называется разность двух соседних значений функций:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0),$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1),$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2);$$

в общем случае

$$\Delta y_i = \Delta f(x_i) = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i). \tag{1.93}$$

Разность между двумя соседними разностями первого порядка называется *разностью второго порядка* и обозначается $\Delta^2 y$. Внизу справа ставится индекс, соответствующий индексу вычитаемого:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0;$$

в общем случае

$$\Delta^2 y_i = \Delta^2 f(x_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i. \tag{1.94}$$

Подобным же образом определяются разности третьего, четвертого, пятого и любого порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i,$$
$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i,$$
$$\Delta^5 y_i = \Delta^4 y_{i+1} - \Delta^4 y_i;$$

в общем случае

$$\Delta^n y_i = \Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i. \tag{1.95}$$

Первые разности функции по отношению к данному шагу h определяются формулами

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

или, в общем случае,

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Разности первых разностей образуют разности второго порядка (или вторые разности)

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \quad \text{или} \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

и так далее, пока не достигается желаемая точность. Таким образом, так как $y = f(x)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta y_0 = y_1 - y_0,\\
&\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\\
&\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta y_1 = y_2 - y_1,\\
&\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\\
&\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Составим следующую таблицу.

Таблица 2

Аргументы	Функции	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	Четвертые разности	Пятые разности
x_0	y_0					
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_0$			
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$	
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_1$
$x_6 = x_0 + 6h$	y_6	Δy_5	...	...	...	...
...	...	...				

Если в последнем столбце таблицы m-е разности постоянны в пределах точности эксперимента, то $(m+1)$-е разности вычислять не следует, а для m-х разностей следует брать их среднее значение. Подробное последовательное вычисление разностей первого, второго и высших порядков проводится в табл. 3.

Закономерность, связывающая разности со значениями функции в последовательных точках, имеет вид

$$\Delta^n y_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y(x_i + ih), \tag{1.96}$$

где C_n^i — число сочетаний из n элементов по i.

Таким образом, для любого интерполяционного узла коэффициенты при y являются биномиальными коэффициентами. Так, при $n = 3$, $i = 2$, получаем

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_2 &= (-1)^{3-0} C_3^0 y(x_2 + 0 \cdot h) + (-1)^{3-1} C_3^1 y(x_2 + h) +\\
&+ (-1)^{3-2} C_3^2 y(x_2 + 2h) + (-1)^{3-3} C_3^3 y(x_2 + 3h) =\\
&= -y(x_2) + 3y(x_3) - 3y(x_4) + y(x_5) = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2.
\end{aligned}$$

Таблица 3

Значение аргумента x	Значение функции y	Первая разность Δy	Вторая разность $\Delta^2 y$	Третья разность $\Delta^3 y$	Четвертая разность $\Delta^4 y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$	$\Delta^4 y_2 = \Delta^3 y_3 - \Delta^3 y_2 = y_6 - 4y_5 + 6y_4 - 4y_3 + y_2$
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = y_5 - 2y_4 + y_3$	$\Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = y_6 - 3y_5 + 3y_4 - y_3$	$\Delta^4 y_3 = \Delta^3 y_4 - \Delta^3 y_3 = y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + y_3$
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	$\Delta^2 y_4 = \Delta y_5 - \Delta y_4 = y_6 - 2y_5 + y_4$	$\Delta^3 y_4 = \Delta^2 y_5 - \Delta^2 y_4 = y_7 - 3y_6 + 3y_5 - y_4$	$\Delta^4 y_4 = \Delta^3 y_5 - \Delta^3 y_4 = y_8 - 4y_7 + 6y_6 - 4y_5 + y_4$
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5	$\Delta y_5 = y_6 - y_5$	$\Delta^2 y_5 = \Delta y_6 - \Delta y_5 = y_7 - 2y_6 + y_5$	$\Delta^3 y_5 = \Delta^2 y_6 - \Delta^2 y_5 = y_8 - 3y_7 + 3y_6 - y_5$	
$x_6 = x_0 + 6h$	y_6	$\Delta y_6 = y_7 - y_6$	$\Delta^2 y_6 = \Delta y_7 - \Delta y_8 = y_8 - 2y_7 + y_6$		
$x_7 = x_0 + 7h$	y_7	$\Delta y_7 = y_8 - y_7$			
$x_8 = x_0 + 8h$	y_8				

Пусть в точках x_0, x_1, x_2, ..., x_n, образующих арифметическую прогрессию, заданы значения функции $y=f(x)$. Определим многочлен n-й степени $Q_n(x)$ в виде

$$Q_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\ldots+$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}). \quad (1.97)$$

Форма записи многочлена (1.97) обладает той особенностью, что каждое слагаемое добавляет последовательно новый интерполяционный узел и повышает степень многочлена на единицу. Так, $a_0+a_1(x-x_1)=Q_1(x)$ — многочлен первой степени с интерполяционными узлами x_0 и x_1; многочлен $Q_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)\times$ $\times(x-x_1)$ — многочлен второй степени с интерполяционными узлами x_0, x_1, x_2 и т. д. Определим коэффициенты многочлена a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n так, чтобы выполнялись условия (1.87). Из равенств (1.92) имеем

$$x_1-x_0=h,$$
$$x_2-x_0=2h,$$
$$x_3-x_0=3h,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n-x_0=nh.$$

Подставим в соотношение (1.97) вместо x его последовательные значения x_0, x_1, x_2, ..., x_n, полагая при этом $Q_n(x_0)=y_0$, $Q_n(x_1)=y_1$, $Q_n(x_2)=y_2$ и т. д. Тогда получаем:

1) при $x=x_0$

$$Q_n(x_0)=a_0+a_1(x_0-x_0)+a_2(x_0-x_0)(x_0-x_1)+$$
$$+\ldots+a_n(x_0-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})=a_0$$

или

$$y_0=a_0.$$

Отсюда искомый коэффициент

$$a_0=y_0; \quad (1.98)$$

2) при $x=x_1$

$$Q_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1-x_0)(x_1-x_1)+$$
$$+a_3(x_1-x_0)(x_1-x_1)(x_1-x_2)+$$
$$+\ldots+a_n(x_1-x_0)(x_1-x_1)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

или

$$y_1=a_0+a_1(x_1-x_0)=y_0+a_1h.$$

Отсюда искомый коэффициент

$$a_1=\frac{y_1-y_0}{h}=\frac{\Delta y_0}{h}; \quad (1.99)$$

3) при $x=x_2$

$$Q_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)+$$
$$+a_3(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)+a_4(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)(x_2-x_3)+$$
$$+\ldots+a_n(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)\ldots(x_2-x_{n-1})=a_0+a_1(x_2-x_0)+$$
$$+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

или

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h = -y_0 + 2y_1 + 2h^2 a_2.$$

Отсюда, учитывая, что $2 = 1 \cdot 2 = 2!$, имеем

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}; \tag{1.100}$$

4) при $x = x_3$

$$Q_n(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) +$$
$$+ a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + a_4(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_3) +$$
$$+ \ldots + a_n(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_3)(x_3 - x_4)\ldots(x_3 - x_{n-1}) =$$
$$= a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) +$$
$$+ a_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 3h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \cdot 3h \cdot 2h +$$
$$+ a_3 \cdot 3h \cdot 2h \cdot h = y_0 + 3(y_1 - y_0) + 3(y_2 - 2y_1 + y_0) + a_3 6h^3$$

или

$$y_3 = y_0 - 3y_1 + 3y_2 + 6a_3h^3.$$

Искомый коэффициент

$$a_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \tag{1.101}$$

так как $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$. Продолжая аналогичные выкладки и учитывая зависимости (1.96), получаем последующие коэффициенты

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4},$$
$$a_5 = \frac{\Delta^5 y_0}{5!h^5}, \tag{1.102}$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Полученные значения коэффициентов (1.98), (1.99), (1.100), (1.101) и (1.102) подставляем в многочлен (1.97). Имеем

$$Q_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}). \tag{1.103}$$

Многочлен (1.103) называется *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Если положить

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

то искомая зависимость принимает вид

$$y = f(x) = Q_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (1.104)$$

Это формула Ньютона для интерполирования *вперед*, так как коэффициенты многочлена определяются через значение функции и разности в крайне левом узле интерполяции (с абсциссой x_0).

Пример 1. Из наблюдений получены следующие значения аргументов x и функций y:

$x_1 = 1$ $\quad y_1 = 660;$
$x_2 = 1{,}5$ $\quad y_2 = 1215;$
$x_3 = 2$ $\quad y_3 = 2060;$
$x_4 = 2{,}5$ $\quad y_4 = 3215;$
$x_5 = 3$ $\quad y_5 = 4660.$

Найти аналитическую зависимость x и y.

Решение. Заполним соответствующую таблицу.

Таблица 4

x	y	Первые разности	Вторые разности
1	660		
		555	
1,5	1215		290
		845	
2	2060		310
		1155	
2,5	3215		290
		1445	
3	4660		

Вторые разности почти постоянны. Поэтому, ограничиваясь тремя членами интерполяционной формулы, взяв среднее значение $\Delta^2 y = 300$ и учитывая, что шаг $h = 0{,}5$, получим

$$y = 660 + \frac{x-1}{0{,}5}555 + \frac{1}{2}\frac{x-1}{0{,}5}\left(\frac{x-1}{0{,}5} - 1\right)300 = 450 - 390x + 600x^2.$$

Для контроля нужно построить график полученной функции, придавая аргументу x значения, соответствующие как точкам разбиения, так и промежуточным точкам. Наличие недопустимых отклонений означает, что выбранное количество точек разбиения недостаточно. В этом случае следует уменьшить шаг разбиения и вновь повторить вычисления. Формула Ньютона для интерполирования *назад* выводится аналогично; коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ определяются с помощью правых узлов. В этом случае многочлен $Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + a_4(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3}) + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})\ldots(x - x_2)(x - x_1). \quad (1.105)$$

Коэффициенты многочлена a_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определим так, чтобы выполнялись условия (1.87). Из равенств (1.92) имеем

$$\begin{aligned}
x_{n-1} - x_n &= -h,\\
x_{n-2} - x_n &= -2h,\\
x_{n-3} - x_n &= -3h,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_2 - x_n &= -(n-2)h,\\
x_1 - x_n &= -(n-1)h,\\
x_0 - x_n &= -nh.
\end{aligned}$$

Подставим в соотношение (1.105) вместо x его последовательные значения x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, полагая при этом

$$Q_n(x_n) = y_n,\ Q_n(x_{n-1}) = y_{n-1},\ Q_n(x_{n-2}) = y_{n-2} \text{ и т. д.}$$

В итоге получаем:

1) при $x = x_n$

$$\begin{aligned}
Q_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_n) + a_2(x_n - x_n)(x_n - x_{n-1}) +\\
+ \ldots + a_n(x_n - x_n)(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})\ldots(x_n - x_2)(x_n - x_1) = a_0
\end{aligned}$$

или

$$y_n = a_0.$$

Искомый коэффициент

$$a_0 = y_n; \tag{1.106}$$

2) при $x = x_{n-1}$

$$\begin{aligned}
Q_n(x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) + a_2(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-1}) +\\
+ \ldots + a_n(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})\ldots(x_{n-1} - x_2)(x_{n-1} - x_1) =\\
= a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_n + a_1(-h)
\end{aligned}$$

или

$$y_{n-1} = y_n - a_1 h.$$

Искомый коэффициент

$$a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}; \tag{1.107}$$

3) при $x = x_{n-2}$

$$\begin{aligned}
Q_n(x_{n-2}) = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) +\\
+ a_3(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-2}) +\\
+ \ldots + a_n(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-2})\ldots(x_{n-2} - x_1) =\\
= a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_n +\\
+ \frac{y_n - y_{n-1}}{h}\cdot(-2h) + a_2(-2h)\cdot(-h) = -y_n + 2y_{n-1} + a_2 \cdot 2h^2
\end{aligned}$$

или

$$y_{n-2} = -y_n + 2y_{n-1} + 2h^2 a_2.$$

Искомый коэффициент

$$a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}. \tag{1.108}$$

Продолжая аналогичные выкладки и учитывая зависимости (1.96), получаем

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}, \\ a_4 &= \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4!h^4}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= \frac{\Delta^{n-1} y_1}{(n-1)!h^{n-1}}, \\ a_n &= \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Полученные значения коэффициентов (1.106)—(1.109) подставляем в многочлен (1.105). Тогда

$$\begin{aligned} Q_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\ldots(x - x_2)(x - x_1). \end{aligned} \tag{1.110}$$

Это формула Ньютона для интерполирования назад, которая используется в дальнейшем для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

2. Метод Адамса — Крылова. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y) \tag{1.111}$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.112}$$

Требуется найти его решение в некотором промежутке (x_0, x).

Определение приближенного числового решения дифференциального уравнения сводится к составлению таблицы приближенных значений решения дифференциального уравнения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Постановка вопроса о нахождении приближенных значений решения $y(x)$ возможна лишь в случае, если это решение существует и является единственным. Для этого как известно из теоремы существования и единственности, достаточно чтобы функция $f(x)$ в правой части дифференциального уравнения (1.111) была непрерывной и имела ограниченную частную производную $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

В методе Адамса производная искомого интеграла дифференциального уравнения на соответствующем участке заменяется после-

довательно многочленом первой, второй и более высокой степени, а сам интеграл многочленом степени на единицу выше.

Пусть x_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ — система равноотстоящих значений с шагом h, т. е. x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_1+h$, ... и соответствующие значения функции в этих точках $y_i=y(x_i)$. Очевидно, имеем

$$\Delta y_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx, \tag{1.113}$$

так как

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy=y\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=y(x_{i+1})-y(x_i)=\Delta y_i.$$

На участке $[x_0, x_2]$ изменения аргумента x заменим производную y' искомого интеграла (решения) интерполяционным многочленом Ньютона (для интерполирования назад) первой степени (1.110). В этом случае (при $n=1$) получаем

$$y'\approx Q_1(x)=y_1'+\frac{\Delta y_0'}{h}(x-x_1). \tag{1.114}$$

Положим в дифференциальном уравнении (1.111)

$$q_i=y_i'h=f(x_i, y_i)\,h, \tag{1.115}$$

где $i=0, 1, 2, \ldots$. Тогда для любой разности

$$\Delta^n q_i=\Delta^n y_i' h. \tag{1.116}$$

Зависимость (1.114) в этом случае принимает вид

$$y'\approx Q_1(x)=\frac{q_1}{h}+\frac{\Delta q_0}{h^2}(x-x_1). \tag{1.117}$$

Интегрируя равенство (1.117) по промежутку $[x_1, x_2]$ и учитывая, что $x_2-x_1=h$, получим

$$\int_{x_1}^{x_2} dy=\frac{q_1}{h}\int_{x_1}^{x_2} dx+\frac{\Delta q_0}{h^2}\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)\,dx,$$

откуда

$$y\Big|_{x_1}^{x_2}=\frac{q_1}{h}\,x\Big|_{x_1}^{x_2}+\frac{\Delta q_0}{h^2}\left[\frac{x^2}{2}-x_1x\right]_{x_1}^{x_2},$$

или

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{q_1}{h}(x_2-x_1)+\frac{\Delta q_0}{h^2}\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-x_1x_2+x_1^2\right).$$

Далее имеем

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1 = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,dx = q_1 + \frac{\Delta q_0}{2h^2}\left(\frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= q_1 + \frac{\Delta q_0}{2h^2}(x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2) = q_1 + \frac{\Delta q_0}{2h^2}(x_2 - x_1)^2 =$$

$$= q_1 + \frac{\Delta q_0}{2h^2} h^2 = q_1 + \frac{1}{2}\Delta q_0.$$

Отсюда

$$y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2}\Delta q_0.$$

Интегрируя равенство (1.117) по промежутку $[x_1, x_3]$, имеем

$$y_3 = y_2 + q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 \text{ и т. д.}$$

В общем случае, интегрируя по промежутку $[x_i, x_{i+1}]$, получаем формулу Адамса с первыми разностями:

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1}, \qquad (1.118)$$

где $i = 1, 2, \ldots$.

На участке $[x_0, x_3]$ изменения аргумента x производную y' искомого интеграла заменим интерполяционным многочленом Ньютона второй степени.

В этом случае (при $n = 2$), имеем:

$$y' \approx Q_2(x) = y_2' + \frac{\Delta y_1'}{h}(x - x_2) + \frac{\Delta^2 y_0'}{2!h^2}(x - x_2)(x - x_1).$$

Учитывая соотношения (1.115) и (1.116), последнее равенство можно привести к виду

$$y' \approx Q_2(x) = \frac{q_2}{h} + \frac{\Delta q_1}{h^2}(x - x_2) + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}(x - x_2)(x - x_1).$$

Так как $x_2 = x_1 + h$, то последнее слагаемое полученного равенства можно представить в виде

$$(x - x_2)(x - x_1) = [(x - x_1) - h](x - x_1) = (x - x_1)^2 - (x - x_1)h.$$

Тогда

$$y' \approx Q_2(x) = \frac{q_2}{h} + \frac{\Delta q_1}{h^2}(x - x_2) + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}(x - x_1)^2 - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}(x - x_1). \qquad (1.119)$$

Интегрируя равенство (1.119) по промежутку $[x_2, x_3]$ и учитывая, что $x_3 - x_2 = h$, $x_3 - x_1 = 2h$, имеем

$$\int_{x_2}^{x_3} dy = \frac{q_2}{h}\int_{x_2}^{x_3} dx + \frac{\Delta q_1}{h^2}\int_{x_2}^{x_3}(x - x_2)\,dx + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\int_{x_2}^{x_3}(x - x_1)^2\,dx -$$

$$- \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\int_{x_2}^{x_3}(x - x_1)\,dx,$$

откуда

$$y\Big|_{x_2}^{x_3} = \frac{q_2}{h}x\Big|_{x_2}^{x_3} + \frac{\Delta q_1}{h^2}\left[\frac{x^2}{2} - x_2 x\right]_{x_2}^{x_3} + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\left[\frac{(x-x_1)^3}{3}\right]_{x_2}^{x_3} - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\left[\frac{(x-x_1)^2}{2}\right]_{x_2}^{x_3}$$

и

$$y(x_3) - y(x_2) = \frac{q_2}{h}(x_3 - x_2) + \frac{\Delta q_1}{h^2}\left(\frac{x_3^2}{2} - x_2 x_3 - \frac{x_2^2}{2} + x_2^2\right) +$$
$$+ \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\left[\frac{(x_3-x_1)^3}{3} - \frac{(x_2-x_1)^3}{3}\right] - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\left[\frac{(x_3-x_1)^2}{2} - \frac{(x_2-x_1)^2}{2}\right],$$

или

$$y_3 - y_2 = \Delta y_2 = \int_{x_2}^{x_3} y'(x)\,dx = q_2 + \frac{\Delta q_1}{2h^2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\left(\frac{8h^3}{3} - \frac{h^3}{3}\right) -$$
$$- \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\left(2h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = q_2 + \frac{\Delta q_1}{2} + \frac{7\Delta^2 q_0}{2!\cdot 3} - \frac{3\Delta^2 q_0}{2\cdot 2!} = q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0.$$

Отсюда

$$y_3 = y_2 + q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0. \qquad (1.120)$$

Интегрируя равенство (1.119) по промежутку $[x_1, x_4]$, имеем

$$y_4 = y_3 + q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1. \qquad (1.120')$$

В общем случае формула Адамса со вторыми разностями имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}, \qquad (1.120'')$$

где $i = 2, 3, \ldots$.

Аналогично получаются формулы Адамса с третьими и более высокими разностями:

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}, \qquad (1.121)$$

где $i = 3, 4, \ldots$;

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{i-4}, \qquad (1.122)$$

где $i = 4, 5, \ldots$.

В силу формулы Ньютона для интерполирования назад (1.110) с точностью до разностей четвертого порядка получаем

$$y' = y_i' + q\,\Delta y_{i-1}' + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3}',$$

где $q = \frac{x - x_i}{h}$, или

$$y' = y_i' + q\,\Delta y_{i-1}' + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_{i-3}'.$$

Подставляя полученное равенство в соотношение (1.113), учитывая, что $x = hq + x_i$, т. е. $dx = hdq$, и интегрируя теперь по всему отрезку [0, 1], имеем

$$\Delta y_i = h \int_0^1 \left(y'_i + q\,\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\,\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\,\Delta^3 y'_{i-3}\right) dq,$$

откуда

$$\Delta y_i = hy'_i + \frac{1}{2}\,\Delta\,(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}\,\Delta^2\,(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}\,\Delta^3\,(hy'_{i-3}).$$

Учитывая, что $y'_i = \frac{q_i}{h}$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, получаем экстраполяционную формулу Адамса

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\,\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\,\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\,\Delta^3 q_{i-3}.$$

Формулы (1.121) и (1.122) более точные, но и более сложные для вычислений. Поэтому за основную будем считать формулу Адамса со вторыми разностями (1.120″).

Процесс вычисления начинают с определения начальных значений искомого интеграла дифференциального уравнения в нескольких точках. Применяя формулу с первыми разностями (1.118), находим

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{и} \quad y(x_1) = y(x_0 + h) = y_1;$$

применяя формулу со вторыми разностями (1.120″), имеем

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y(x_0 + h) = y_1 \quad \text{и} \quad y(x_2) = y(x_0 + 2h) = y_2;$$

применяя формулу с третьими разностями (1.121), получаем начальные значения y_0, y_1, y_2 и y_3, т. е. так называемый начальный отрезок, который определяют каким-нибудь числовым методом. При этом следует иметь ввиду, что значение интеграла в точке x_0 задается начальным условием.

Для составления начала таблицы используем метод последовательных приближений академика А. Н. Крылова. Этот метод основывается на использовании формулы Ньютона (1.104) для интерполирования вперед. На участке $[x_0, x_2]$ изменения аргумента x заменяем производную y' искомого интеграла интерполяционным многочленом Ньютона (для интерполирования вперед) второй степени. Тогда (при $n = 2$), на основании равенства (1.104), имеем

$$y' \approx Q_2(x) = y'_0 + \frac{\Delta y'_0}{h}\,(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y'_0}{2!h^2}\,(x - x_0)(x - x_1).$$

Так как

$$y_0' = \frac{q_0}{h}, \quad \Delta^n q_i = \Delta^n y_i' h,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$y' \approx Q_2(x) = \frac{q_0}{h} + \frac{\Delta q_0}{h^2}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}(x - x_0)(x - x_1).$$

Поскольку $x_1 - x_0 = h$, то последнее слагаемое можно представить в виде

$$(x - x_0)(x - x_1) = (x - x_0)[(x - x_0) - (x_1 - x_0)] = (x - x_0)^2 - (x - x_0)h.$$

Отсюда

$$y' \approx Q_2(x) = \frac{q_0}{h} + \frac{\Delta q_0}{h^2}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}(x - x_0)^2 - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}(x - x_0).$$

Интегрируя полученное равенство по промежутку $[x_0, x_1]$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} dy = \frac{q_0}{h}\int_{x_0}^{x_1} dx + \frac{\Delta q_0}{h^2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)\,dx + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)^2\,dx - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)\,dx,$$

откуда

$$y\Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{q_0}{h}x\Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{\Delta q_0}{h^2}\left[\frac{(x - x_0)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1} + \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^3}\left[\frac{(x - x_0)^3}{3}\right]_{x_0}^{x_1} - \frac{\Delta^2 q_0}{2!h^2}\left[\frac{(x - x_0)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1},$$

или

$$y(x_1) - y(x_0) = \frac{q_0}{h}(x_1 - x_0) + \frac{\Delta q_0}{2h^2}[(x_1 - x_0)^2 - (x_0 - x_0)^2] +$$

$$+ \frac{\Delta^2 q_0}{3 \cdot 2!h^3}[(x_1 - x_0)^3 - (x_0 - x_0)^3] - \frac{\Delta^2 q_0}{2 \cdot 2!h^2}[(x_1 - x_0)^2 - (x_0 - x_0)^2].$$

Далее имеем

$$y_1 - y_0 = \frac{q_0}{h}h + \frac{\Delta q_0}{2h^2}h^2 + \frac{\Delta^2 q_0}{3!h^3}h^3 - \frac{\Delta^2 q_0}{2 \cdot 2!h^2}h^2$$

и

$$y_1 = y_0 + q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0 + \frac{\Delta^2 q_0}{3!} - \frac{\Delta^2 q_0}{2 \cdot 2!}.$$

Окончательно получаем

$$y_1 = y_0 + q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_0. \tag{1.123}$$

Аналогично, из формулы (1.104) следует, что

$$y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2}\Delta q_1 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_1. \tag{1.124}$$

В общем случае

$$y_{i+1} = y_i + q_i + \frac{1}{2}\Delta q_i - \frac{1}{12}\Delta^2 q_i. \tag{1.125}$$

В полученной формуле правая часть содержит разности с одним и тем же нижним индексом.

Рассмотрим равенство (1.124). Вторая разность

$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0,$$

поэтому

$$\Delta q_1 = \Delta q_0 + \Delta^2 q_0.$$

Будем считать, что практически вторые разности постоянны, т. е.

$$\Delta^2 q_1 = \Delta^2 q_0.$$

Тогда равенство (1.124) принимает вид

$$y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2}(\Delta q_0 + \Delta^2 q_0) - \frac{1}{12}\Delta^2 q_0,$$

или

$$y_2 = y_1 + q_1 + \frac{1}{2}\Delta q_0 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0. \qquad (1.126)$$

Формулы (1.123) и (1.126) называются формулами Крылова построения начала таблицы для формулы Адамса (1.120″).

Для вычисления в этих формулах разностей Δq_0 и $\Delta^2 q_0$ необходимо знать значения y_1, y_2, поэтому сразу использовать формулы Крылова нельзя, их следует вводить в вычислительный процесс постепенно, сохраняя в них лишь те члены, которые могут быть в данный момент вычислены. Полученные значения y_1 и y_2 являются приближенными; с их помощью можно вычислить лишь приближенные значения соответствующих разностей, которые вводятся затем в формулы Крылова. В результате получаем уже более точные значения y_1, y_2. Циклический процесс последовательного уточнения вычисляемых значений называется *методом последовательных приближений.*

Для определения величины y_1 по формуле (1.123), ограничимся двумя первыми членами. Тогда в первом приближении

$$\begin{aligned} &y_1^{(1)} = y_0 + q_0, && \Delta y_0^{(1)} = y_1^{(1)} - y_0 = q_0; \\ &q_1^{(1)} = f(x_1, y_1^{(1)})\,h, && \Delta q_0^{(1)} = q_1^{(1)} - q_0. \end{aligned} \qquad (A)$$

Здесь индекс, заключенный в скобках, указывает первые приближения соответствующих величин. Зная величину $\Delta q_0^{(1)}$, можно найти значения y_1 и y_2 по формулам Крылова (1.123) и (1.126), сохраняя в них уже три члена. Тогда во втором приближении

$$\begin{aligned} &y_1^{(2)} = y_0 + q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(1)}, && \Delta y_0^{(2)} = y_1^{(2)} - y_0; \\ &q_1^{(2)} = f(x_1, y_1^{(2)})\,h, && \Delta q_0^{(2)} = q_1^{(2)} - q_0; \\ &y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + q_1^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(2)}, && \Delta y_1^{(2)} = y_2^{(2)} - y_1^{(2)}; \\ &q_2^{(2)} = f(x_2, y_2^{(2)})\,h, && \Delta q_1^{(2)} = q_2^{(2)} - q_1^{(2)}; \\ & && \Delta^2 q_0^{(2)} = \Delta q_1^{(2)} - \Delta q_0^{(2)}. \end{aligned} \qquad (Б)$$

Здесь уже используются полные формулы Крылова (1.123) (1.126), которые позволяют выполнить пересчет всех значений таблицы. Вычисления прекращаются, когда полученная разность $\Delta^2 q_i$ будет примерно одинаковой. После этого для дальнейшего составления таблицы применяется основная формула (1.120″).

Контрольная формула для вычислений, выполненных с помощью формулы (1.120″), имеет следующий структурный вид:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \tag{1.127}$$

т. е. последующая ордината функции равна сумме предшествующей ординаты и соответствующего приращения на интервале h.

Как известно из дифференциального исчисления, приращение функции

$$\Delta y_i = y'(x_i)\, h = y_i' h.$$

Тогда исходную формулу (1.127) можно записать в виде

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h. \tag{1.128}$$

Заменим в формуле (1.128) величину y_i' (т. е. значение производной в точке i) средним арифметическим значений производных в граничных точках интервала $\frac{y_i' + y_{i+1}'}{2}$. Тогда равенство (1.128) принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} h. \tag{1.129}$$

Очевидно, что ввиду малости интервала h, такая замена допустима. Так как

$$y_i' h = q_i, \quad y_{i+1}' h = q_{i+1},$$

то

$$y_{i+1} - y_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}.$$

В окончательном виде контрольная формула такова:

$$\Delta y_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}. \tag{1.130}$$

Величины q_i и q_{i+1} в формуле (1.130) к моменту контроля уже вычислены и имеются в таблице. В таблице имеется также разность Δy_i, которую и сравниваем с контрольным числом, полученным по формуле (1.130).

Пример 2. Методом Адамса — Крылова решить на отрезке [0,1] задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = x + y^2,$$

при $y(0) = 0$. Шаг разбиения $h = 0{,}1$. Точность вычислений 0,001

Р е ш е н и е. Все вычисления проводим в основной таблице (табл. 5). Из начального условия имеем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ (здесь $i = 0$).
По данному дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y) = x + y^2$, находим величину

$$q_0 = y_0' h = f(x_0, y_0)\, h = (0 + 0) \cdot 0{,}1 = 0.$$

Записываем все данные в основную таблицу.

Используя формулы (А), строим первое приближение и результаты записываем в первую часть ($i = 0{,}1$) основной таблицы, которую затем отделяем горизонтальной линией. Так, при $i = 1$, $x_1 = 0{,}1$ имеем

$$y_1^{(1)} = y_0 + q_0 = 0 + 0 = 0;$$

$$\Delta y_0^{(1)} = y_1^{(1)} - y_0 = q_0 = 0;$$

$$q_1^{(1)} = f(x_1, y_1^{(1)})\, h = (0{,}1 + 0^2) \cdot 0{,}1 = 0{,}01;$$

$$\Delta q_0^{(1)} = q_1^{(1)} - q_0 = 0{,}01 - 0 = 0{,}01.$$

Таблица 5

Основная таблица

i	x_i	y_i	Δy_i	q_i	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	Контроль $\Delta y_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}$	
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$\Delta y_0^{(1)} = 0$	$q_0 = 0$	$\Delta q_0^{(1)} = 0{,}01$			
1	$x_1 = 0{,}1$	$y_1^{(1)} = 0$		$q_1^{(1)} = 0{,}01$				
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$\Delta y_0^{(2)} = 0{,}005$	$q_0 = 0$	$\Delta q_0^{(2)} = 0{,}010$			
1	$x_1 = 0{,}1$	$y_1^{(2)} = 0{,}005$	$\Delta y_1^{(2)} = 0{,}015$	$q_1^{(2)} = 0{,}010$	$\Delta q_1^{(2)} = 0{,}010$	$\Delta^2 q_0^{(2)} = 0$		
2	$x_2 = 0{,}2$	$y_2^{(2)} = 0{,}020$		$q_2^{(2)} = 0{,}020$				
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$\Delta y_0 = 0{,}005$	$q_0 = 0$	$\Delta q_0 = 0{,}010$	$\Delta^2 q_0 = 0$	0,005	0
1	$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}005$	$\Delta y_1 = 0{,}015$	$q_1 = 0{,}010$	$\Delta q_1 = 0{,}010$	$\Delta^2 q_1 = 0$	0,015	0
2	$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}020$	$\Delta y_2 = 0{,}025$	$q_2 = 0{,}020$	$\Delta q_2 = 0{,}010$	$\Delta^2 q_2 = 0{,}001$	0,025	0
3	$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}045$	$\Delta y_3 = 0{,}040$	$q_3 = 0{,}030$	$\Delta q_3 = 0{,}011$	$\Delta^2 q_3 = 0$	0,036	−0,004
4	$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}080$	$\Delta y_4 = 0{,}047$	$q_4 = 0{,}041$	$\Delta q_4 = 0{,}011$	$\Delta^2 q_4 = 0$	0,046	−0,001
5	$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}127$	$\Delta y_5 = 0{,}057$	$q_5 = 0{,}052$	$\Delta q_5 = 0{,}011$	$\Delta^2 q_5 = 0{,}002$	0,058	+0,001
6	$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}184$	$\Delta y_6 = 0{,}068$	$q_6 = 0{,}063$	$\Delta q_6 = 0{,}013$	$\Delta^2 q_6 = 0{,}002$	0,070	+0,002
7	$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}252$	$\Delta y_7 = 0{,}083$	$q_7 = 0{,}076$	$\Delta q_7 = 0{,}015$	$\Delta^2 q_7 = 0{,}004$	0,084	+0,001
8	$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}335$	$\Delta y_8 = 0{,}098$	$q_8 = 0{,}091$	$\Delta q_8 = 0{,}018$	$\Delta^2 q_8 = 0{,}004$	0,100	+0,002
9	$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}433$	$\Delta y_9 = 0{,}120$	$q_9 = 0{,}109$	$\Delta q_9 = 0{,}022$		0,120	0
10	$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 0{,}553$		$q_{10} = 0{,}131$				

Затем строим второе приближение. Так как $\Delta q_0^{(1)} = 0{,}01$, то вычисляем значения y_1 и y_2, используя формулы (Б). Тогда, при $i = 0, 1, 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ имеем

$$y_1^{(2)} = y_0 + q_0 + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(1)} = 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 = 0{,}005;$$

$$\Delta y_0^{(2)} = y_1^{(2)} - y_0 = 0{,}005 - 0 = 0{,}005;$$

$$q_1^{(2)} = f(x_1,\ y_1^{(2)})\,h = (0{,}1 + 0{,}005^2)\cdot 0{,}1 = 0{,}010;$$

$$\Delta q_0^{(2)} = q_1^{(2)} - q_0 = 0{,}010 - 0 = 0{,}010;$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + q_1^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta q_0^{(2)} = 0{,}005 + 0{,}010 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}010 =$$

$$= 0{,}015 + 0{,}005 = 0{,}020;$$

$$\Delta y_1^{(2)} = y_2^{(2)} - y_1^{(2)} = 0{,}020 - 0{,}005 = 0{,}015;$$

$$q_2^{(2)} = f(x_2,\ y_2^{(2)})\,h = (0{,}2 + 0{,}020^2)\cdot 0{,}1 = 0{,}020;$$

$$\Delta q_1^{(2)} = q_2^{(2)} - q_1^{(2)} = 0{,}020 - 0{,}010 = 0{,}010;$$

$$\Delta^2 q_0^{(2)} = \Delta q_1^{(2)} - \Delta q_0^{(2)} = 0{,}010 - 0{,}010 = 0.$$

Так как полученная вторая разность $\Delta^2 q_0 = 0$, то необходимость дальнейшего пересчета значений y_1 и y_2 по полным формулам Крылова (1.123) и (1.126) отпадает.

Итак, $y_1 = 0{,}005$; $y_2 = 0{,}020$. Таблицу второго приближения ($i = 0$, 1, 2) отделяем горизонтальной линией. Для продолжения основной таблицы вычисляем значения y_{i+1} ($i = 2, 3, \ldots, 9$), используя формулу (1.120″). Имеем

$$y_3 = y_2 + q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_0 = 0{,}020 + 0{,}020 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}010 +$$

$$+ \frac{5}{12}\cdot 0 = 0{,}045;$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 0{,}045 - 0{,}020 = 0{,}025;$$

$$q_3 = f(x_3,\ y_3)\,h = (0{,}300 + 0{,}045^2)\cdot 0{,}1 = 0{,}030;$$

$$\Delta q_2 = q_3 - q_2 = 0{,}030 - 0{,}020 = 0{,}010;$$

$$\Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1 = 0{,}010 - 0{,}010 = 0.$$

Далее

$$y_4 = y_3 + q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 = 0{,}045 + 0{,}030 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}010 +$$

$$+ \frac{5}{12}\cdot 0 = 0{,}080 \text{ и т. д.}$$

Одновременно с нахождением значений y_{i+1} вычисляются в последнем столбце табл. 5 и контрольные числа [по формуле (1.130)]; за вертикальной линией в этом столбце записываются отклонения от вычисленного значения Δy_i. В данном случае эти отклонения не превышают четырех единиц запасного знака.

Окончательный результат вычислений приводится в следующей таблице.

Таблица 6

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	0	0,01	0,02	0,04	0,08	0,13	0,18	0,25	0,34	0,43	0,55
Δy		0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,05	0,07	0,09	0,09	0,12
$\Delta^2 y$			0	0,01	0,02	0,01	0	0,02	0,02	0	0,03

Упражнения

Методом Адамса — Крылова решить задачу Коши на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0,1$ для следующих дифференциальных уравнений и начальных условий:

1. $y'=x^2+y$ при $y(0)=0,1$;
2. $y'=x^2+y^2$ при $y(0)=0,1$;
3. $y'=2x+y^2$ при $y(0)=0$;
4. $y'=x^2+xy$ при $y(0)=0,2$;
5. $y'=xy+y^2$ при $y(0)=0,1$.

Вычисления производить с точностью до 0,001. Результат округлить с точностью до 0,01.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, связывающее неизвестную функцию y, независимую переменную x и производные функции y по x до n-го порядка включительно:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Ограничимся рассмотрением уравнений n-го порядка, разрешенными относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{2.2}$$

где f — определенная, однозначная и непрерывная функция в области изменения своих аргументов. Решением дифференциального уравнения (2.2) в интервале (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество при всех значениях x из этого интервала, причем функция $\varphi(x)$ имеет в заданном интервале непрерывные производные до n-го порядка включительно и начальные значения $[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)]$ принадлежат области задания функции f для всех значений x из данного интервала.

Решение дифференциального уравнения содержит n произвольных постоянных C и представляет не одну, а целое семейство интегральных кривых, зависящее от n параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Для определения n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ необходимо задать n условий. Общий интеграл дифференциального уравнения (2.2) (решение в неявном виде) записывается так:

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Дифференциальное уравнение (2.2) называется *линейным*, если его правая часть является линейной функцией относительно аргументов $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x), \tag{2.3}$$

где $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — непрерывные рациональные коэффициенты, зависящие, в общем случае, от x; $f(x)$ — непрерывная в интервале (a, b) функция x.

§ 2. ЗАДАЧА КОШИ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

формулируется так: среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$y = y(x), \tag{2.3'}$$

для которого функция $y(x)$ вместе с $(n-1)$ последовательными производными принимает заданные значения y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ при заданном значении x_0 независимой переменной x, т. е.

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \quad (2.4)$$

где x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, причем при $x=x_0$ решение (2.3′) удовлетворяет следующим условиям:

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}. \quad (2.4')$$

Числа y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ называются *начальными значениями решения* (2.3′); число x_0 — *значением независимой переменной*; числа x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ в совокупности называются *начальными данными* решения; условия (2.4′) — *начальными условиями* этого решения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $(n=2)$

$$y''=f(x, y, y').$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в определении решения $y=y(x)$, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

при $x=x_0$ $y=y_0$, $y'=y_0'$.

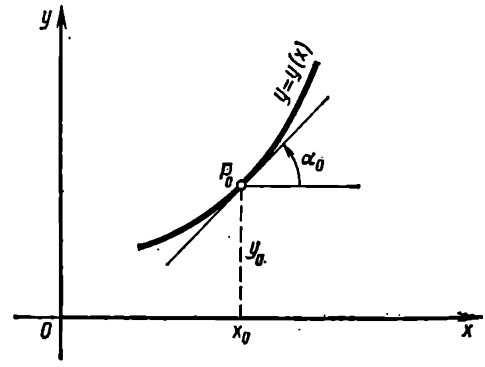


Рис. 20

Геометрически решение этого дифференциального уравнения сводится к нахождению интегральной кривой (рис. 20), проходящей через заданную точку $P_0(x_0; y_0)$ и имеющей в ней заданную касательную, которая образует с положительным направлением оси абсцисс такой угол α_0, что $\operatorname{tg}\alpha_0=y_0'$, т. е.

$$\alpha_0=\operatorname{arctg} y_0'.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши определяет условия, при которых решение дифференциального уравнения n-го порядка существует и является единственным при заданных начальных условиях. В упрощенном виде теорему можно сформулировать так: задача Коши с начальными данными x_0, y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ имеет решение, если правая часть уравнения $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$. Для единственности решения также необходимо, чтобы правая часть дифференциального уравнения (2.2) имела в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y^{(n-1)})$ ограниченные частные производные по $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Приве-

дем (без доказательства) формулировку теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

и заданы начальные условия:

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ y'' = y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0.$$

Предположим, что функция $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ определена в некоторой замкнутой ограниченной области D:

$$|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b,\ |y' - y_0'| \leqslant b,$$
$$|y'' - y_0''| \leqslant b,\ \ldots,\ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leqslant b$$

с начальными значениями $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$ внутри этой области (здесь a и b — заданные положительные числа) и удовлетворяет в этой области следующим условиям:

1) функция непрерывна по всем своим аргументам и, следовательно, ограничена, т. е.

$$|f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})| \leqslant M, \tag{2.5}$$

где M — постоянное положительное число;

2) функция имеет ограниченные частные производные по аргументам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$\left|\frac{\partial f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}}\right| \leqslant K \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ y^{(0)} \equiv y), \tag{2.6}$$

где K — постоянное положительное число.

Тогда данное дифференциальное уравнение имеет единственное решение

$$y = y(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям, причем оно заведомо определено и непрерывно вместе с производными до n-го порядка включительно в отрезке

$$|x - x_0| \leqslant h,$$

где

$$h = \min\left[a,\ \frac{b}{\max\limits_{(D)}(M, |y'|, |y''|, \ldots, |y^{(n-1)}|)}\right].$$

Здесь символ «min» обозначает «меньшее из чисел», символ «$\max\limits_{(D)}$» следует читать «большее из чисел в области D».

§ 3. ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЯ

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.7}$$

в области D изменения переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, для которой существует единственное решение задачи Коши, называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{2.8}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, $\ldots$, C_n и имеющая частные производные по x до n-го порядка включительно, если:

а) система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y' &= \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 &= \psi_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= \psi_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}); \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

б) функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ является решением дифференциального уравнения n-го порядка (2.7) при всех значениях произвольных постоянных, получаемых из соотношений (2.10), когда начальные значения $(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ принадлежат области D.

Для нахождения решения дифференциального уравнения (2.7) с начальными данными $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ из области D, если известно общее решение (2.8), следует подставить в систему (2.9) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. Тогда получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{2.9'}$$

Решая эту систему относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаем

$$C_1 = C_1^{(0)}, \quad C_2 = C_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad C_n = C_n^{(0)}.$$

Подставляя найденные значения произвольных постоянных в общее решение (2.8) находим искомое решение

$$y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}).$$

Общим решением в форме Коши называется общее решение

$$y=\varphi(x,\ x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}),\qquad (2.1$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальное значение y_0 решения $y=y(x)$ и начальные значения y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ производных этого решения при фиксированном значении x_0 независимой переменной x.

Общим интегралом дифференциального уравнения n-го порядка (2.7) называется общее решение этого уравнения, заданное в неявном виде

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)=0.$$

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка (2.7) называется решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши.

Особым решением называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.

При решении дифференциального уравнения n-го порядка в результате k-кратного интегрирования получается соотношение

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-k)},\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k)=0,$$

называемое *промежуточным интегралом* дифференциального уравнения.

Промежуточный интеграл, полученный после однократного интегрирования

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)},\ C_1)=0,$$

называется *первым интегралом.*

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПУТЕМ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

А. Дифференциальные уравнения вида $\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$

Простейшим дифференциальным уравнением n-го порядка является уравнение, содержащее независимую переменную (в частном случае постоянную величину) и производную n-го порядка:

$$y^{(n)}=f(x),\qquad (2.1$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция в интервале $(a,\ b)$.

Последовательно интегрируя дифференциальное уравнение (2.1 n раз и каждый раз соответственно понижая порядок производной, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int f(x)\,dx+C_1,\\
&\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int\int f(x)\,dx\,dx+C_1x+C_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad (2.1\\
&y=\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n\text{ раз}}f(x)\,dx\,dx\,dx\ldots dx+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.
\end{aligned}$$

Последнее равенство является общим решением дифференциального уравнения (2.12) в области $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<y'<+\infty$, $-\infty<y''<+\infty$, ..., $-\infty<y^{(n-1)}<+\infty$.

Существует единственное решение задачи Коши, причем начальные данные y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ можно задавать любыми, а x_0 — фиксированное число интервала (a, b).

Общее решение в форме Коши имеет вид

$$y=\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\text{ раз}} f(x)\,dx\,dx\,dx\dots dx+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\dots+y_0(x-x_0)+y_0. \qquad (2.14)$$

Здесь y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, которые могут принимать любые значения.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''=\frac{1}{\cos^2 x}$$

при следующих начальных условиях: $x_0=\frac{\pi}{4}$, $y_0=\frac{\ln 2}{2}$, $y_0'=1$.

Решение. Запишем данное уравнение в дифференциальной форме

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\cos^2 x},$$

или

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Считая производную зависимой переменной и интегрируя почленно полученное равенство, имеем

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int\frac{dx}{\cos^2 x},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}x+C_1.$$

Повторяя рассуждения, получаем

$$dy=(\operatorname{tg}x+C_1)\,dx,$$

откуда

$$y=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx+C_1\int dx+C_2.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=-\ln\cos x+C_1x+C_2.$$

Решим задачу Коши при заданных начальных условиях. Так как $y' = \operatorname{tg} x + C_1$, то подставляя в это уравнение заданные числовые значения, имеем

$$1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C_1 = 1 + C_1,$$

откуда

$$C_1 = 0.$$

В результате подстановки заданных значений в общее решение дифференциального уравнения, получаем

$$\frac{\ln 2}{2} = -\ln \cos \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{4} + C_2,$$

или

$$C_2 = \frac{\ln 2}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - \ln 2 = 0.$$

Итак, интегральная кривая определяется уравнением

$$y = -\ln \cos x.$$

Задача 1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найти закон движения тела, считая, что оно движется только под влиянием силы тяжести.

Решение. Задача состоит в определении неизвестного закона изменения пути (высоты) s с течением времени t, т. е. необходимо найти закон $s = f(t)$. На основании второго закона динамики (Ньютона)

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F, \qquad (*)$$

где $\frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение движущегося тела; m — его масса; F — сила, действующая на тело в направлении движения. По условию задачи сила F равна силе тяжести mg, которая направлена вниз, т. е. в сторону противоположную движению, и поэтому имеет знак минус:

$$F = -mg. \qquad (**)$$

Приравнивая соотношения (*) и (**), получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g.$$

Это дифференциальное уравнение вида $y'' = \text{const}$. Интегрируя его дважды, имеем

$$\frac{ds}{dt} = -gt + C_1, \qquad (***)$$

$$s = \int (-gt + C_1)\, dt = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий. Отсчет пути ведется от начального момента, поэтому при $t=0$, $s=0$, следовательно, $C_2=0$.

Так как, при $t=0$, начальная скорость $v_0=\frac{ds}{dt}$, то из уравнения (***), получаем

$$C_1=v_0.$$

Итак, зависимость пройденного телом пути s от времени t:

$$s=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Задача 2. По наклонной плоскости длиной $l=10$ м скользит тело A (рис. 21). Угол наклона плоскости $\alpha=45°$. Коэффициент трения по поверхности плоскости $k=0{,}5$. Найти закон движения тела и время, за которое тело пройдет наклонную плоскость, если в начальный момент оно находилось в покое на верхней ее грани.

Решение. В любой момент t на тело действуют три силы: сила тяжести P, сила трения F и реакция плоскости N_1. Нормальная N и тангенциальная T составляющие силы тяжести P соответственно равны

$$N=P\cos\alpha \text{ и } T=P\sin\alpha.$$

Как известно, сила трения

$$F=-kN=-kP\cos\alpha.$$

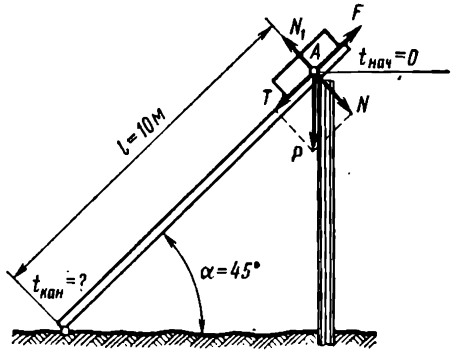


Рис. 21

Заменим действующие силы P, F, N_1 эквивалентной системой сил T и F (так как силы N и N_1 взаимно уравновешиваются, а система сил T и N эквивалентна силе P). Равнодействующая эквивалентной системы сил T и F сила

$$R=T+F=P\sin\alpha-kP\cos\alpha$$

действует в направлении движения.

С другой стороны,

$$P=mg,$$

$$R=m\frac{d^2s}{dt^2},$$

откуда получаем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha).$$

Это дифференциальное уравнение типа $y''=C$. Решая его непосредственным интегрированием, имеем

$$\frac{ds}{dt}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)t+C_1.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2+C_1t+C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий: $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=0$ при $t=0$. Составляем систему

$$\left.\begin{aligned}0&=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)\cdot 0+C_1,\\ 0&=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)\cdot 0+C_1\cdot 0+C_2,\end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1=C_2=0$. Подставляя эти значения в общее решение дифференциального уравнения получим закон движения

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2. \qquad (*)$$

Подставляя в уравнение (*) числовые данные задачи, находим

$$s=\frac{g}{2}(\sin 45^\circ-0{,}5\cos 45^\circ)t^2=\frac{g\sqrt{2}}{8}t^2. \qquad (**)$$

Для нахождения времени прохождения тела по плоскости решаем уравнение (**) относительно t. Имеем

$$t=2\sqrt{\frac{s\sqrt{2}}{g}}.$$

В данном случае $s=l=10$ м, следовательно,

$$t=2\sqrt{\frac{l\sqrt{2}}{g}}=2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{9{,}81}}=2{,}4\ (\text{с}).$$

Задача 3. Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что при этом сила тяги возрастает на 1200 Н за каждую секунду. Найти уравнение движения вагона, если вначале сила тяги была равна нулю. Сила тяжести вагона $P=100$ кН, сопротивление трения постоянно и равно 2000 Н; начальная скорость равна нулю.

Решение. Центр тяжести вагона перемещается по горизонтальной прямой. Начало координат поместим в начальном положении центра тяжести вагона (рис. 22). Проектируя внешние силы, приложенные к вагону, на ось абсцисс, получим два слагаемых: силу тяги, равную $1200t$, и силу сопротивления, равную 2000 Н (t — время, прошедшее с момента выключения реостата).

На основании второго закона динамики дифференциальное уравнение движения вагона

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = 1200t - 2000. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение типа $y'' = f(x)$.

Начало движения вагона не совпадает с моментом выключения реостата. Время t_0 соответствует началу движения и определяется из условия равенства силы тяги и силы сопротивления:

$$1200t_0 = 2000,$$

откуда

$$t_0 = \frac{5}{3}\text{ (с)}.$$

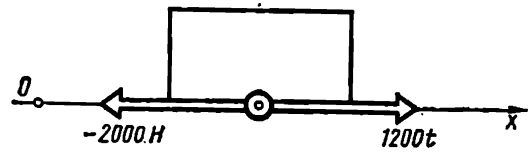


Рис. 22

Для удобства вычислений величину $1200t - 2000$ обозначим через $1200t_1$. Тогда

$$t_1 = t - \frac{2000}{1200} = t - \frac{5}{3}$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2} - 1200t_1 = 0. \tag{2}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2), получаем

$$\frac{dx}{dt_1} = \frac{1200g}{P}\frac{t_1^2}{2} + C_1. \tag{3}$$

Подставляя начальные значения $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t_1 = 0$ в уравнение (3), находим

$$C_1 = 0.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3), находим общее решение уравнения (2):

$$x = \frac{1200g}{P}\frac{t_1^3}{6} + C_2. \tag{4}$$

Определим величину C_2. При $t_1 = 0$, имеем $x = 0$, следовательно, $C_2 = 0$. На основании равенства (4), находим уравнение движения вагона:

$$x = \frac{1200g}{6P}\left(t - \frac{5}{3}\right)^3 = \frac{1200 \cdot 9{,}81}{6 \cdot 100\,000}\left(t - \frac{5}{3}\right)^3,$$

или

$$x = 0{,}01962\left(t - \frac{5}{3}\right)^3 \text{ (м)}.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y''=\dfrac{1}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$.

Отв. $y=\dfrac{1}{3\sqrt{x+1}}+C_1x+C_2$.

2. $y'''=-\cos x$.

Отв. $y=\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

3. $y''=\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$.

Отв. $y=\dfrac{1}{x^2-1}+C_1x+C_2$.

4. $y''=e^x+\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$.

Отв. $y=e^x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+C_1x+C_2$.

5. $y''^3-1=0$.

Отв. $y=\dfrac{x^2}{2}+C_1x+C_2$.

6. Найти решение дифференциального уравнения $y''=6x$, удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $y'=0$ при $x=0$.

Отв. $y=x^3$.

Б. Дифференциальные уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ y^{(k+2)},\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \tag{2.15}$$

С помощью подстановки $y^{(k)}=z$, где z — новая неизвестная функция, можно понизить его порядок на k единиц, т. е. привести к уравнению $(n-k)$-го порядка:

$$F(x,\ z,\ z'\ z'',\ \ldots,\ z^{(n-k)})=0. \tag{2.16}$$

В частном случае, уравнение

$$f(x,\ y',\ y'')=0$$

с помощью подстановки $y'=p$ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$f\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right)=0.$$

Если в результате интегрирования дифференциального уравнения (2.16) имеем

$$z=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k})$$

или

$$\Phi(x,\ z,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k})=0,$$

то возвращаясь к переменной y, получим

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

или

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0,$$

т. е. уравнения, рассмотренные в предыдущем разделе. В результате интегрирования каждого из этих дифференциальных уравнений вводятся k новых произвольных постоянных. В итоге получим семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных, называемое *общим решением* (или *общим интегралом*) *дифференциального уравнения* n-го *порядка* (2.15).

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''' = -\frac{1}{2} y''^3.$$

Решение. Это дифференциальное уравнение 3-го порядка зависит от x, поскольку производные являются функциями x.

Пусть $y'' = z$. Тогда данное дифференциальное уравнение принимает вид

$$z' = -\frac{1}{2} z^3.$$

Так как $z' = \frac{dz}{dx}$, то последнее уравнение можно записать в виде

$$-\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{2},$$

или

$$-z^{-3}\,dz = \frac{1}{2}\,dx.$$

Интегрируя полученное равенство, имеем

$$\frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2} x + C,$$

или

$$\frac{1}{z^2} = x + 2C.$$

Полагая $2C = C_1$, получаем

$$z^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Возвращаясь к исходной функции и используя обратную подстановку $z = y''$, находим

$$y''^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Так как

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{1}{x + C_1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{x + C_1}},$$

то имеет место дифференциальное уравнение типа

$$y'' = f(x),$$

следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \pm (x + C_1)^{-\frac{1}{2}},$$

или

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \pm (x + C_1)^{-\frac{1}{2}}\, d(x + C_1).$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2 (x + C_1)^{\frac{1}{2}} + C_2.$$

Отсюда

$$dy = \left[\pm 2 (x + C_1)^{\frac{1}{2}} + C_2\right] dx.$$

После повторного интегрирования получаем общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = \pm \frac{4}{3} (x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3 = \pm \frac{4}{3} (x + C_1) \sqrt{x + C_1} + C_2 x + C_3.$$

Задача 4. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

Решение. В момент t тело находится под действием силы тяжести и сопротивления среды. Сила тяжести равна mg; сила сопротивления среды равна kv^2 и направлена в сторону противоположную движению. Следовательно, равнодействующая этих сил $mg - kv^2$. С другой стороны, величина силы, действующей на тело, пропорциональна ускорению движения a и равна ma. Итак,

$$ma = mg - kv^2. \tag{1}$$

Если пройденный путь, считая от начала отсчета, равен s, то скорость $v = \frac{ds}{dt}$; ускорение при прямолинейном движении $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Тогда равенство (1) принимает вид

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{2}$$

Это дифференциальное уравнение вида $y'' = f(y')$. Решим его методом понижения порядка. Так как скорость $v = \frac{ds}{dt}$, то ускорение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v.$$

Дифференциальное уравнение (2) преобразуется к дифференциальному уравнению первого порядка

$$m\frac{dv}{ds}v = mg - kv^2,$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{mv\,dv}{mg-kv^2} = ds.$$

Далее имеем

$$\int \frac{mv\,dv}{mg-kv^2} = \int ds,$$

или

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2| + C = s. \tag{3}$$

Пусть в начальный момент времени ($t=0$) тело находилось в начале отсчета пути ($s=0$) и начало падать с начальной скоростью $v=0$. Подставляя в уравнение (3) $s=0$ и $v=0$, находим

$$-\frac{m}{2k}\ln mg + C = 0,$$

откуда

$$C = \frac{m}{2k}\ln mg.$$

Таким образом,

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2| + \frac{m}{2k}\ln mg = s,$$

или

$$s = \frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-kv^2}\right|.$$

Поскольку

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

то

$$s = \frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right|$$

и

$$\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right| = \frac{2ks}{m}.$$

Так как тело падает, то согласно дифференциальному уравнению (2), $m\frac{d^2s}{dt^2} > 0$. Следовательно,

$$mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} > 0.$$

Поэтому имеем

$$\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=e^{\frac{2ks}{m}},\quad \frac{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{mg}=e^{-\frac{2ks}{m}},\quad \frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Так как s есть возрастающая функция t, то $\frac{ds}{dt}>0$ и перед корнем следует взять знак плюс:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,dt, \tag{4}$$

откуда

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t+C.$$

Интеграл в левой части этого уравнения находим с помощью подстановки $z=e^{\frac{ks}{m}}$, откуда $dz=\frac{k}{m}e^{\frac{ks}{m}}ds$; тогда

$$ds=\frac{m}{k}e^{-\frac{ks}{m}}\,dz=\frac{m}{k}\frac{dz}{z}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{ks}{m}}}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=$$

$$=\frac{m}{k}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t+C.$$

Подставляя в последнее равенство начальные условия $t=0$ и $s=0$, получим $C=0$.

Итак, общий интеграл дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t.$$

Отсюда

$$e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}=e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t}, \tag{5}$$

или

$$\frac{1}{e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}}=e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}.$$

Умножая числитель и знаменатель левой части последнего равенства на $e^{\frac{ks}{m}} - \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1}$, получаем

$$e^{\frac{ks}{m}} - \sqrt{e^{\frac{2ks}{m}} - 1} = e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t},$$

откуда, учитывая равенство (5), имеем

$$e^{\frac{ks}{m}} = \frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}.$$

Окончательно, закон движения падающего тела

$$s = \frac{m}{k} \ln \frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2}.$$

Задача 5. Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/с, а вылетает из него со скоростью 60 м/с. Сила сопротивления бруса прохождению пули пропорциональна квадрату скорости движения (рис. 23). Найти время движения пули через брус.

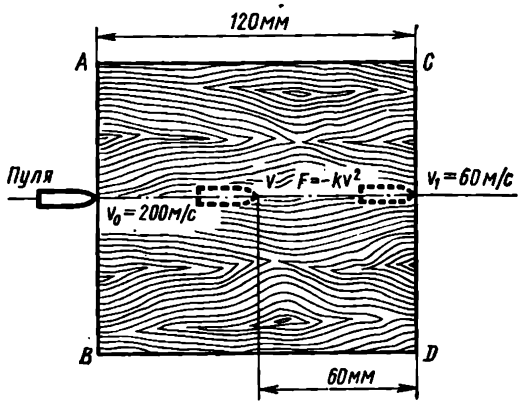


Рис. 23

Решение. Внутри бруса в любой момент t на пулю действует сила сопротивления бруса F. Она направлена в сторону противоположную движению, а по величине пропорциональна квадрату скорости движения пули в данный момент. Таким образом,

$$F = -kv^2.$$

На основании второго закона динамики, сила равна произведению массы m точки на ускорение a, которое сообщается точке:

$$F = ma.$$

Сопоставляя уравнения, получим

$$ma = -kv^2. \tag{1}$$

Как известно, скорость точки

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2}$$

а ускорение

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{3}$$

Подставляя равенства (2) и (3) в уравненне (1), получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

Уравненне (4) является дифференциальным уравнением второго порядка типа $y'' = f(y')$ и решается методом понижения порядка уравнения с помощью введенния новой искомой функции:

$$\begin{aligned} p &= y' = \frac{dy}{dx}, \\ p' &= y'' = \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Итак, применение этого метода приводит к соотношениям

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{dt}$$

н уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m}p^2.$$

Разделим переменные p и t:

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{k}{m}dt.$$

Почленно интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{p} = -\frac{k}{m}t + C_1.$$

Подставляем значенне p и интегрируем еще раз:

$$-\frac{dt}{ds} = -\frac{k}{m}t + C_1,$$

откуда

$$ds = \frac{dt}{\frac{k}{m}t - C_1},$$

следовательно, общее решение

$$s = \frac{m}{k}\int \frac{d\left(\frac{k}{m}t - C_1\right)}{\frac{k}{m}t - C_1} = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t - C_1\right) + C_2. \tag{6}$$

Для нахождения частного решения, вычислим значения произвольных постоянных C_1 н C_2. В соответствии с условиями задачи имеем: при $t = 0$ $s = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 200$ м/с. Продифференцировав уравнение (6), получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t - C_1}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) имеем

$$200 = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot 0 - C_1},$$

откуда $C_1 = -\frac{1}{200}$, а затем из уравнения (6) находим

$$0 = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{k}{m} \cdot 0 + \frac{1}{200}\right) + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{m}{k} \ln \frac{1}{200} = \frac{m}{k} \ln 200.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (6), получим частное решение, определяющее уравнение движения для рассматриваемой задачи:

$$s = \frac{m}{k} \ln\left(\frac{k}{m} t + \frac{1}{200}\right) + \frac{m}{k} \ln 200 =$$

$$= \frac{m}{k} \ln\left[\left(\frac{k}{m} t + \frac{1}{200}\right) 200\right] = \frac{m}{k} \ln\left(200 \frac{k}{m} t + 1\right),$$

или

$$s = \frac{m}{k} \ln\left(200 \frac{k}{m} t + 1\right). \tag{8}$$

Разрешая уравнение (8) относительно t, получим

$$200 \frac{k}{m} t + 1 = e^{\frac{ks}{m}},$$

откуда

$$t = \frac{m}{200k}\left(e^{\frac{ks}{m}} - 1\right). \tag{9}$$

Как видно из уравнений (8) и (9) для нахождения искомого времени t необходимо знать величины k и m.

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $s = h = 12$ см $= 0{,}12$ м имеем $\frac{ds}{dt} = 60$ м/с. Продифференцируем уравнение (8) по t:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{200}{200 \frac{k}{m} t + 1}. \tag{10}$$

Подставим равенство (9) в уравнение (10):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{200}{e^{\frac{ks}{m}}}. \tag{11}$$

Учитывая дополнительное условие, получаем

$$60 = \frac{200}{e^{0{,}12 \frac{k}{m}}}, \tag{11'}$$

откуда

$$k=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0{,}12}m\cong 10{,}03m. \tag{12}$$

Анализируя соотношение (12), видим, что k является линейной функцией m ($k\cong 10{,}03m$) и нет надобности в определении m, достаточно лишь найти величину $e^{\frac{k}{m}}$.

Из равенства (11′) имеем

$$e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}}.$$

Подставляя числовые значения k и $e^{\frac{k}{m}}$ в уравнение (9), получим

$$t=\frac{m}{200\cdot 10{,}03m}\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}\cdot 0{,}12}-1\right]=\frac{1}{2006}\left(\frac{10}{3}-1\right)\cong 0{,}00114.$$

Итак, время прохождения пули через брус $t=0{,}00114$ с.

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $4y'^2=9x$.

Отв. $y=x\sqrt{x}+C$.

2. $xy''-y'=0$.

Отв. $y=C_1x^2+C_2$.

3. $(1+x)\,y''+y'=0$.

Отв. $y=C_1\ln(1+x)+C_2$.

4. $(1+x^2)\,y''+y'^2+1=0$.

Отв. $y=-C_1x+(C_1^2+1)\ln(C_1+x)$.

5. $y''^2=4(y'-1)$.

Отв. $y=x+\frac{1}{3}(x+C_1)^3+C_2$; особое решение $y=x+C$.

6. Решить дифференциальное уравнение $4y'+y''^2=4xy''$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=0$, $y'=-1$ при $x=0$; $y=0$, $y'=0$ при $x=0$.

Отв. $y=x^2-x$, $y=-x^2-x$; $y=0$, $y=\frac{x^3}{3}$.

В. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной

Дифференциальное уравнение вида

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{2.17}$$

допускает понижение порядка на единицу, если принять за новую независимую переменную y, а за новую искомую функцию

$$p=\frac{dy}{dx}. \tag{2.18}$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)p =$$

$$= \left[\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]p = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \qquad (2.19)$$

. . . . . .

Преобразованное данное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\varphi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \frac{d^2p}{dy^2},\ \ldots,\ \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0. \qquad (2.20)$$

Подставляя соотношения (2.18) и (2.19) в дифференциальное уравнение n-го порядка (2.17), получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка с неизвестной функцией p от независимой переменной y.

Принимая y за новую независимую переменную, можно потерять решение вида $y = \text{const}$, которое также может удовлетворять дифференциальному уравнению (2.17). Поэтому непосредственной подстановкой $y = b$ в уравнение (2.17) надо выяснить, имеет ли это дифференциальное уравнение решения такого типа.

В частном случае дифференциальное уравнение

$$f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\varphi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{2}y^2.$$

Решение. Пусть $y' = p$. Принимая y за новую независимую переменную, имеем

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{3}{2}y^2$$

или

$$p\,dp = \frac{3}{2}y^2\,dy.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + C,$$

или

$$p^2 = y^3 + 2C.$$

Заменяем p на y' и полагая $2C=C_1$, получаем

$$y'^2=y^3+C,$$

откуда

$$y'=\pm\sqrt{y^3+C_1},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^3+C_1}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3+C_1}}=\pm dx.$$

Итак, общий интеграл данного дифференциального уравнения

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^3+C_1}}=\pm x+C_2.$$

Задача 6. Найти закон движения и определить период колебаний T математического маятника длиной l при малых отклонениях.

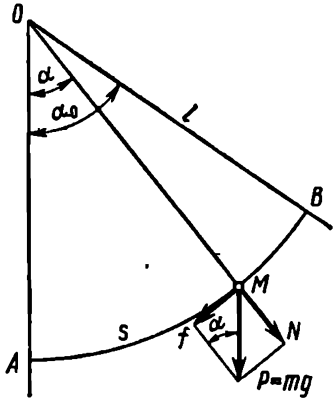


Рис. 24

Решение. Силу тяжести шарика M, равную P, разложим на две составляющие: N (по направлению нити) и f (по касательной к траектории). Сила N уравновешивается сопротивлением нити, и, таким образом, вся система сил эквивалентна силе f. Из рис. 24 видно, что

$$|f|=P\sin\alpha=mg\sin\alpha.$$

Здесь m — масса, g — ускорение силы тяжести.

Так как для положительных углов α касательная составляющая f направлена в противоположную движению сторону, то

$$f=-mg\sin\alpha\cong-mg\alpha,$$

так как при малых отклонениях нити $\sin\alpha\approx\alpha$.

В силу очевидного равенства $\alpha=\frac{s}{l}$ составляющая

$$f=-\frac{mg}{l}s.$$

Здесь $s=\overset{\smile}{AM}$ — путь, пройденный шариком.

На основании второго закона динамики, получим дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{mg}{l}s,$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{l}s.$$

Это дифференциальное уравнение вида $y''=f(y)$ (или $s''=\varphi(s)$). Полагаем $\frac{ds}{dt}=p$ и принимаем s за новую независимую переменную. Тогда дифференциальное уравнение принимает вид

$$p\frac{dp}{ds}=-\frac{g}{l}s,$$

откуда

$$p\,dp=-\frac{g}{l}s\,ds.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и полагая $2C=C_*$, имеем

$$p^2=-\frac{g}{l}s^2+C_*.$$

Заменяя p на s', получаем

$$s'^2=-\frac{g}{l}s^2+C_*,$$

или

$$s'=\pm\sqrt{C_*-\frac{g}{l}s^2}$$

и

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{C_*-\frac{g}{l}s^2}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{ds}{\sqrt{C_*-\frac{g}{l}s^2}}=\pm dt.$$

После интегрирования получим

$$\int\frac{ds}{\sqrt{C_*-\frac{g}{l}s^2}}=\pm t+C_{**}.$$

Учитывая, что

$$\sqrt{C_*-\frac{g}{l}s^2}=\sqrt{\frac{g}{l}\left(\frac{l}{g}C_*-s^2\right)}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{l}{g}C_*-s^2},$$

получаем

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{ds}{\sqrt{\frac{l}{g}C_*-s^2}}=\pm t+C_{**}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\arcsin\frac{s}{\sqrt{\frac{l}{g}C_*}}=\pm t+C_{**}$$

и

$$\arcsin \frac{s}{\sqrt{\frac{l}{g} C_*}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t + C_{**}).$$

Так как

$$\sin\left(\arcsin \frac{s}{\sqrt{\frac{l}{g} C_*}}\right) = \sin\left[\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t + C_{**})\right],$$

то

$$s = \sqrt{C_* \frac{g}{l}} \sin\left[\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t + C_{**})\right].$$

Поскольку $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, то

$$s = \pm \sqrt{C_* \frac{g}{l}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + C_{**} \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Учитывая формулу синуса суммы двух углов и физический смысл s (длина пройденного пути не может быть отрицательной) получим

$$s = \sqrt{C_* \frac{g}{l}} \left(\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \cos C_{**} \sqrt{\frac{g}{l}} + \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \sin C_{**} \sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

или

$$s = \underbrace{\sqrt{C_* \frac{g}{l}} \cos C_{**} \sqrt{\frac{g}{l}}}_{C_1} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \underbrace{\sqrt{C_* \frac{g}{l}} \sin C_{**} \sqrt{\frac{g}{l}}}_{C_2} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения задачи

$$s = C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Из начальных условий $\left(\text{при } t = 0 \text{ имеем } s = a \text{ и } \frac{ds}{dt} = 0\right)$ находим C_1 и C_2:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получаем

$$s = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t;$$

здесь a — амплитуда колебания.

Движение математического маятника описывается гармоническим колебанием с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $yy''=y'^2$.
Отв. $y\ln y+x+C_1y+C_2=0$.
2. $yy''^2=1$.
Отв. $(4\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-3C_1(4\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}=12x+C_2$.
3. $y'y''=2y$.
Отв. $x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt[3]{3y^2+C_1}}$.
4. $y''=yy'$.
Отв. $y=2C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$.
5. $8y'^3=27y$.
Отв. $y=(x+C)^{\frac{3}{2}}$.
6. $y'^3-27y^2=0$.
Отв. $y=(x+C)^3$.
7. $y'''=y$.
Отв. $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

8. Найти интегральную кривую уравнения $yy''+y'^2=1$, проходящую через точку P (0; 1) и касающуюся в этой точке прямой $x+y=1$. *Отв.* $y=-x+1$.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Общий вид *неоднородного линейного дифференциального уравнения* n-го *порядка*

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+p_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=f(x). \quad (2.21)$$

При $f(x)\equiv0$ уравнение (2.21) принимает вид

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+p_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0 \quad (2.22)$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением* n-го *порядка*.

Пусть коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ являются определенными и непрерывными функциями x в интервале (a, b). Тогда дифференциальное уравнение (2.21) имеет единственное решение $y=y(x)$, определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0. \quad (2.23)$$

Начальные данные y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ можно задавать произвольно, а значение x_0 должно быть из интервала (a, b).

Всякое решение линейного дифференциального уравнения является частным решением, следовательно, особых решений линейное дифференциальное уравнение не имеет.

А. Однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

Однородное линейное дифференциальное уравнение всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $y \equiv 0$, так как подставляя это решение в дифференциальное уравнение (2.22) всегда получается тождество $0 \equiv 0$. Нулевое решение удовлетворяет также начальным условиям

$$y = 0,\ y' = 0,\ y'' = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0.$$

Для нахождения общего решения однородного линейного дифференциального уравнения (2.22) необходимо знать n линейно независимых частных решений $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$, для которых тождество

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + \lambda_n y_n = 0, \tag{2.24}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n$ — постоянные числа, выполнимо только в следующем очевидном случае: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. Такая система решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений*.

Для того, чтобы система решений $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$ была *фундаментальной*, т. е. *линейно независимой*, необходимо и достаточно (при $a < x < b$), чтобы определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{2.25}$$

называемый *определителем Вронского* (*или вронскианом*), был отличен от нуля, т. е. $W(x) \neq 0$.

При условии определенности и непрерывности коэффициентов $p_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка (2.22) имеет фундаментальную систему решений и даже бесчисленное множество их.

Фундаментальная система решений $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$ однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.22) называется *нормированной* в точке $x = x_0$, если эти решения удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1,\ y_1' = 0,\ y_1'' = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0, \\ y_2 = 0,\ y_2' = 1,\ y_2'' = 0,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = 0,\ y_n' = 0,\ y_n'' = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)} = 1 \text{ при } x = x_0. \end{array}\right\} \tag{2.26}$$

Если известна фундаментальная система решений $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n$ однородного линейного дифференциального уравнения n-го

порядка (2.22), то общее решение в области $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<y'<+\infty$, $-\infty<y''<+\infty$, ..., $-\infty<y^{(n-1)}<+\infty$ имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_{n-1}y_{n-1}+C_ny_n, \qquad (2.27)$$

где C_1, C_2, C_3, ..., C_{n-1}, C_n — произвольные постоянные.

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка (2.22) с любыми начальными данными y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ при $a<x_0<b$ можно найти выбирая соответствующие значения произвольных постоянных в общем решении (2.27). Тогда, согласно соотношению (2.9′), необходимо решить линейную систему n алгебраических уравнений с n неизвестными C_1, C_2, ..., C_n:

$$\left.\begin{aligned}
y_0&=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0),\\
y_0'&=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\ldots+C_ny_n'(x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_0^{(n-1)}&=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Решение этой системы подставляем в общее решение (2.27) и в результате получаем искомое решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2.22).

Общее решение в форме Коши в заданной области, для фундаментальной системы решений y_1, y_2, y_3, ..., y_n, нормированной в точке $x=x_0$, таково:

$$y=y_0y_1+y_0'y_2+y_0''y_3+\ldots+y_0^{(n-1)}y_n. \qquad (2.29)$$

Здесь y_0, y_0', y_0'', ..., $y_0^{(n-1)}$ — произвольные числа.

Практически фундаментальную систему решений в элементарных функциях для однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.22) удается найти далеко не всегда.

Б. Неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

Для нахождения общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.21) достаточно найти одно его частное решение и сложить с общим решением соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$z^{(n)}+p_1(x)z^{(n-1)}+p_2(x)z^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)z'+p_n(x)z=0. \qquad (2.30)$$

Итак, если y_1 — частное решение дифференциального уравнения (2.21), а общее решение соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения (2.30) имеет вид

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_nz_n, \qquad (2.31)$$

то общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка (2.21) таково:

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n. \qquad (2.32)$$

Пусть правая часть неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.21) $f(x)$ состоит из нескольких слагаемых. Тогда если для соответствующих неоднородных линейных дифференциальных уравнений, правая часть которых равна каждому из слагаемых, можно найти частное решение, то сумма этих частных решений является частным решением всего неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.21).

Это свойство несколько облегчает задачу определения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

В. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \qquad (2.33)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции x.

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (2.34)$$

где y_1, y_2 — частные линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения (2.33).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x), \qquad (2.35)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция x.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}. \qquad (2.36)$$

Здесь y_1, y_2 — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения; $\tilde{y}$ — частное решение неоднородного уравнения.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Уравнения n-го порядка. *Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами* имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (2.37)$$

где коэффициенты a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — постоянные действительные числа.

Построим фундаментальную систему решений. Частное решение линейного однородного дифференциального уравнения (2.37) ищем в виде

$$y = e^{rx}, \tag{2.38}$$

где r — действительное или комплексное число, подлежащее определению. Запишем производные функции (2.38):

$$\left.\begin{aligned} y' &= re^{rx}, \\ y'' &= r^2e^{rx}, \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= r^ne^{rx}. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Подставляя значения (2.38) и (2.39) в линейное однородное дифференциальное уравнение (2.37), получаем

$$(r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n)e^{rx} = 0, \tag{2.40}$$

откуда следует, что r должно удовлетворять алгебраическому уравнению

$$r^n + a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0. \tag{2.41}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2.37).

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2.37) зависит от вида корней его характеристического уравнения.

1. Случай действительных различных корней характеристического уравнения. Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$ — действительные и различные корни характеристического уравнения. Тогда фундаментальная система решений

$$y_1 = e^{r_1x},\ y_2 = e^{r_2x},\ y_3 = e^{r_3x},\ \ldots,\ y_{n-1} = e^{r_{n-1}x},\ y_n = e^{r_nx}, \tag{2.42}$$

общее решение

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x} + \ldots + C_{n-1}e^{r_{n-1}x} + C_ne^{r_nx}. \tag{2.43}$$

2. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Пусть $r_{1,2} = a \pm bi$ — комплексные сопряженные корни характеристического уравнения. Этим корням соответствуют два линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx. \tag{2.44}$$

Если корни r_1 и r_2 мнимые, т. е. $r_{1,2} = \pm ib$, то соответствующие линейно независимые частные решения

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx. \tag{2.45}$$

Фундаментальная система решений в общем случае состоит из линейно независимых решений, соответствующих другим сопряженным парам комплексных корней и всем действительным корням.

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами дает общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2.37).

В общем решении корням $r_{1,2}=a\pm ib$ соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx); \tag{2.46}$$

мнимым корням $r_{1,2}=\pm ib$ соответствует выражение

$$C_1\cos bx+C_2\sin bx. \tag{2.47}$$

3. Случай действительных равных корней характеристического уравнения. Пусть r_1 — действительный k-кратный корень. Ему соответствуют k линейно независимых частных решений вида

$$e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ x^2e^{r_1x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{r_1x}; \tag{2.48}$$

в общем решении этому корню соответствует выражение вида

$$e^{r_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1}). \tag{2.49}$$

4. Случай комплексных равных корней характеристического уравнения. Если $r_{1,2}=a\pm ib$ — сопряженные комплексные корни характеристического уравнения кратности k, то этим корням соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения вида

$$\left.\begin{aligned} &e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\\ &e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

В общем решении этим корням соответствует выражение вида

$$\begin{aligned} e^{ax}[&(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})\cos bx+\\ &+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin bx]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Если $r_{1,2}=\pm ib$ — сопряженные мнимые корни характеристического уравнения кратности k, то этим корням соответствует выражение

$$\begin{aligned} &(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})\cos bx+\\ &+(C_{k+1}+C_{k+2}x+C_{k+3}x^2+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin bx. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Фундаментальная система решений состоит в общем случае из линейно независимых частных решений вида (2.52), соответствующих простым и кратным действительным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (2.37) получается в виде линейной комбинации этих решений с произвольными постоянными коэффициентами.

II. Уравнения второго порядка. В частном случае линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{2.53}$$

где a_1, a_2 — постоянные коэффициенты. Будем искать общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения в виде

$$y = e^{rx}.$$

Имеем

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2e^{rx}.$$

Следовательно, после подстановки значений y' и y'' должно иметь место тождество

$$e^{rx}(r^2 + a_1r + a_2) = 0,$$

или

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0.$$

Для составления характеристического уравнения линейного дифференциального уравнения необходимо каждую производную искомой функции ($y = y^0$, y', y'') заменить через r в степени, равной порядку производной ($y = r^0$, r, r^2). Итак, нахождение частных решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами сводится к решению квадратных уравнений.

Случай 1. Корни характеристического уравнения действительные и различные ($r_1 \neq r_2$). В этом случае имеем два линейно независимых частных решения

$$y_1 = C_1e^{r_1x} \quad \text{и} \quad y_2 = C_2e^{r_2x}.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

т. е.

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}. \tag{2.54}$$

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексные попарно сопряженные ($r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$). Принимая во внимание формулу Эйлера

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta ix} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

найдем, что общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x} = C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{2.55}$$

Общее решение (2.55) можно представить также в тригонометрической форме:

$$y = Me^{ax} \sin (bx + \varphi), \tag{2.55'}$$

где M и φ — постоянные величины.

Случай 3. Корни характеристического уравнения действительные и равные ($r_1 = r_2$). Общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x} = e^{r_1x}(C_1 + C_2x). \tag{2.55''}$$

Для решения однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами необходимо:

1) составить соответствующее характеристическое уравнение;

2) найти его корни;

3) составить общее решение, соответствующее типу полученных корней.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 - r - 2 = 0.$$

Найдем его корни: $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Фундаментальная система решений есть

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$r^2 - 4r + 13 = 0.$$

Найдем его корни: $r_1 = 2 + 3i$, $r_2 = 2 - 3i$. Здесь $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Фундаментальная система решений

$$y_1 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_2 = e^{2x} \sin 3x.$$

Общее решение имеет вид

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \text{ или } (r+1)^2 = 0$$

имеет кратные корни $r_1 = r_2 = -1$. Фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x} (C_1 + C_2 x).$$

Пример 4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$r^3 - 5r^2 + 6r = 0,$$

его корни различны и действительны: $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Функции $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение данного дифференциального уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Пример 5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''' - 2y'' - 5y + 6 = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Заметим, что один из корней этого уравнения $r_1 = 1$. После деления характеристического уравнения на $r - 1$ имеем

$$r^2 - r - 6 = 0,$$

откуда находим $r_2 = -2$, $r_3 = 3$. Все корни характеристического уравнения действительные различные числа. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

Пример 6. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = 0$$

имеет один действительный корень $r_1 = 2$ и два мнимых: $r_2 = 2i$, $r_3 = -2i$. Фундаментальная система решений такова:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x.$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

Пример 7. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y''' + 8y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^3 + 8 = 0$$

можно разложить на множители:

$$(r + 2)(r^2 - 2r + 4) = 0.$$

Находим корни этого уравнения: $r + 2 = 0$, откуда $r_1 = -2$; $r^2 - 2r + 4 = 0$, откуда $r_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x).$$

Пример 8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y^{IV}+4y'''+8y''+8y'+4y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^4+4r^3+8r^2+8r+4=0$$

имеет двукратные комплексные попарно сопряженные корни: $r_1=r_2=-1+i$; $r_3=r_4=-1-i$. Здесь $\alpha=-1$; $\beta=1$. Фундаментальная система решений

$$y_1=e^{-x}\cos x,\ y_2=xe^{-x}\cos x,\ y_3=e^{-x}\sin x,\ y_4=xe^{-x}\sin x.$$

Общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}[(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x].$$

Пример 9. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y^{IV}-2y'''-y''-4y'+12y=0.$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4-2r^3-r^2-4r+12=0.$$

Найдем корни характеристического уравнения: $r_{1,2}=2$, $r_{3,4}=-1\pm i\sqrt{2}$. Здесь $\alpha=-1$; $\beta=\sqrt{2}$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x)=e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x).$$

Пример 10. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y^{VII}-3y^{VI}+5y^{V}-7y^{IV}+7y'''-5y''+3y'-y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$r^7-3r^6-5r^5-7r^4+7r^3-5r^2+3r-1=0.$$

Замечаем, что один из корней $r_1=1$. Проверим, не является ли этот корень кратным. Запишем производную левой части характеристического уравнения:

$$7r^6-18r^5+25r^4-28r^3+21r^2-10r+3=0.$$

Видим, что $r_2=1$ также является корнем этого уравнения. Дифференцируя последнее равенство, имеем

$$42r^5-90r^4+100r^3-84r^2+42r-10=0.$$

Находим, что $r_3=1$ является корнем и этого уравнения. Дифференцируя далее, получаем

$$210r^4-360r^3+300r^2-168r+42=0,$$

или, после сокращения,

$$35r^4-60r^3+50r^2-28r+7=0.$$

Определяем, что $r=1$ уже не является корнем этого уравнения, следовательно, $r=1$ является трехкратным корнем $r_{1,2,3}=1$ характеристического уравнения.

Разделим левую часть характеристического уравнения на $(r-1)^3$:

$$r^4+2r^2+1=0,$$

или

$$(r^2+1)^2=0,$$

откуда

$$r_{4,5}=i; \quad r_{6,7}=-i.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)+(C_4+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x.$$

Задача 1. Найти закон движения материальной частицы массой m под влиянием силы, направленной к точке O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O (рис. 25).

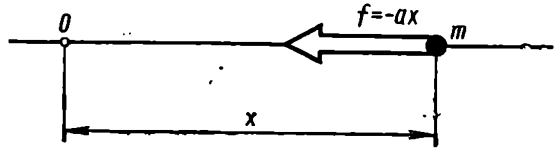


Рис. 25

Примечание. Если на материальную частицу массой m действует центральная сила f, пропорциональная удалению x частицы от центра притяжения O, т. е. $f=-ax$, то такая сила называется *восстанавливающей*.

Решение. В данном случае восстанавливающая сила

$$f=-ax.$$

По второму закону динамики эта сила определяется дифференциальным уравнением

$$f=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-ax$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0,$$

где $k^2=\frac{a}{m}$ (здесь a — коэффициент восстановления; k — частота колебаний).

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2-k^2=0$$

и найдем его корни: $r_{1,2}=\pm\sqrt{-k^2}=\pm ki$. Корни характеристического уравнения мнимые, поэтому общее решение имеет вид

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt,$$

или

$$x=C_1\left(\sin kt+\frac{C_2}{C_1}\cos kt\right).$$

Введем вспомогательный угол φ, положив $\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi$. Тогда

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}(\cos\varphi\sin kt+\sin\varphi\cos kt).$$

Обозначая $\frac{C_1}{\cos\varphi}=A$, имеем

$$x=A\sin(kt+\varphi). \tag{1}$$

Равенство (1) есть уравнение гармонического колебания с амплитудой A и начальной фазой φ. Период колебания T найдем из

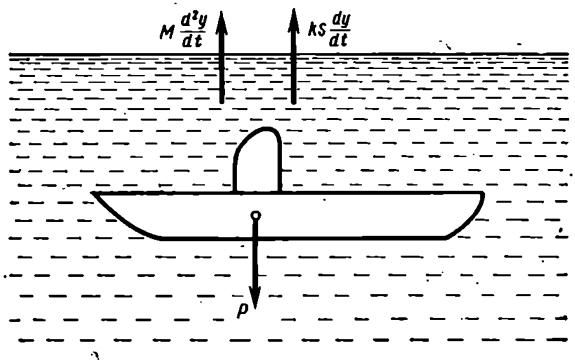


Рис. 26

равенства $k(t+T)+\varphi=kt+\varphi+2\pi$ (2π — период синуса), откуда

$$T=\frac{2\pi}{k},$$

или

$$k=\frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Подставляя значение (2) в общее решение (1), окончательно получим

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

Задача 2. Подводная лодка, не имевшая хода, получила небольшую отрицательную плавучесть P и погружается на глубину, двигаясь поступательно (рис. 26). Сопротивление воды пропорционально первой степени скорости погружения и равно kSv, где k — коэффи

циент пропорциональности, S — площадь горизонтальной проекции лодки, v — скорость погружения. Масса лодки равна M. Определить скорость погружения и путь, пройденный погружающейся лодкой за время t_1, если при $t=0$ начальная скорость $v_0=0$.

Решение. Проектируя силы, действующие на лодку, при ее погружении, на вертикальную ось, получаем дифференциальное уравнение движения

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+kS\frac{dy}{dt}-P=0. \tag{1}$$

Здесь $M\frac{d^2y}{dt^2}$ — произведение массы на ускорение (сила тяжести погружающейся лодки), $kS\frac{dy}{dt}$ — сопротивление воды. Воспользуемся подстановкой $v=\frac{dy}{dt}$ и разделим уравнение (*) на M:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{kSv}{M}-\frac{P}{M}=0. \tag{2}$$

Разделяя в уравнении (2) переменные, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{Mdv}{P-kSv}=dt.$$

Интегрируя его, получаем общее решение

$$-\frac{M}{kS}\ln C(P-kSv)=t, \tag{3}$$

Учитывая начальные условия (при $t=0$, $v=0$), находим

$$C=\frac{1}{P}.$$

Таким образом, уравнение (3) принимает вид

$$-\frac{M}{kS}\ln\frac{1}{P}(P-kSv)=-\frac{M}{kS}\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=t.$$

После простых алгебраических преобразований получаем

$$\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=-\frac{kS}{M}t,$$

или, после потенцирования,

$$1-\frac{k}{P}Sv=e^{-\frac{kS}{M}t}.$$

Итак, искомая скорость погружения

$$v=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right).$$

Для определения пути, пройденного погружающейся лодкой за время t_1, последнее уравнение перепишем в виде

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{P}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right),$$

откуда

$$dy = \frac{P}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right)dt.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными; интегрируя его, находим зависимость пути y от времени:

$$y = \frac{P}{kS}\left(t + \frac{M}{kS}e^{-\frac{kS}{M}t} + C\right).$$

Из этого уравнения, учитывая начальные условия ($y = 0$ при $t = 0$), получаем

$$0 = \frac{P}{kS}\left(\frac{M}{kS} + C\right),$$

откуда

$$C = -\frac{M}{kS}.$$

Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{P}{kS}\left(t + \frac{M}{kS}e^{-\frac{kS}{M}t} - \frac{M}{kS}\right) = \frac{P}{kS}\left[t - \frac{M}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right)\right].$$

При $t = t_1$ пройденный путь $y = y_1$ составляет

$$y_1 = \frac{P}{kS}\left[t_1 - \frac{P}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t_1}\right)\right].$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$.
Отв. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$.
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
Отв. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.
3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.
4. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
Отв. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.
5. $y''' - 13y' - 12y = 0$.
Отв. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$.
6. $y^{IV} - y = x^3$.
Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x^3$.
7. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4e^{-2x}$.
8. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.
Отв. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$.

9. $y''+2y'+2y=0$.
Отв. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.
10. $y''+4y=0$.
Отв. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.
11. $y'''-8y=0$.
Отв. $y=C_1e^{2x}+e^{x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$.
12. $y^{IV}+10y''+9y=0$.
Отв. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$.
13. $y^{IV}-y'''+y''-y'+12y=0$.
Отв. $y=e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+e^{-x}(C_3\cos\sqrt{2}x+C_4\sin\sqrt{2}x)$.
14. $y^{VI}-y=0$.
Отв. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.
15. $y'''+y''=0$.
Отв. $y=C_1e^{-x}+C_2+C_3x$.
16. $y'''-5y''+17y'-13y=0$.
Отв. $y=C_1e^{x}+(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)e^{3x}$.
17. $y^{VII}+3y^{VI}+3y^{V}+y^{IV}=0$.
Отв. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+(C_5+C_6x+C_7x^2)e^{-x}$.
18. $y^{VII}-y^{VI}+9y^{V}-9y^{IV}+24y'''-24y''+16y'-16y=0$.
Отв. $y=C_1e^{x}+C_2\cos x+C_3\sin x+(C_4+C_5x)\cos 2x+(C_6+C_7x)\sin 2x$.
Найти решения задачи Коши для следующих дифференциальных уравнений:
19. $y''-5y'+4y=0$, если $y=1$, $y'=1$ при $x=0$.
Отв. $y=e^{x}$.
20. $y''-y=0$, если $y=2$, $y'=0$ при $x=0$.
Отв. $y=e^{x}+e^{-x}$.
21. $y''+y=0$, если $y=1$, $y'=0$ при $x=\frac{\pi}{2}$.
Отв. $y=\sin x$.
22. $y'''-y'=0$, если $y=1$, $y'=0$, $y''=0$ при $x=2$.
Отв. $y=1$.
23. Если ось вала турбины расположена горизонтально, а центр тяжести диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y (рис. 27) оси вала при

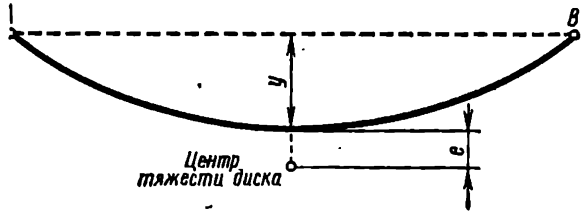


Рис. 27

его вращении удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{1}{m\alpha}-\omega^2\right)y=g\cos\omega t+\omega^2e,$$

где m — масса диска; α — постоянное число, зависящее от рода закрепления концов A и B; ω — угловая скорость вращения; e — эксцентриситет центра тяжести диска. Найти общий интеграл этого уравнения.

Отв. При $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{g}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2}{k^2},$$

где $k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega_2$;

при $\frac{1}{m\alpha} < \omega^2$

$$y = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{e\omega^2}{k^2},$$

где $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$.

24. Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Внутри трубки без трения скользит шар. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находился на оси вращения и имел скорость v_0 (вдоль трубки).

Указание. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r.$$

Начальные условия: $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$.

Отв. $r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$.

25. Тело весом 20 Н, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v м/с равно 0,04 v; $g = 9{,}8$ м/с^2. Через какое время тело достигнет наивысшего положения?

Отв. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + k \frac{ds}{dt} + mg = 0; \quad t \cong 1{,}7 \text{ с}.$$

26. Тело весом P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтали, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления воздуха R. Определить наибольшую высоту h подъема тела. Считать сопротивление пропорциональным первой степени скорости ($R = kPv$).

Отв. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + mg + \frac{dy}{dt} kP = 0;$$

$$h = \frac{v_0 \sin \alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln (1 + kv_0 \sin \alpha).$$

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Уравнения n-й степени. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n = f(x), \qquad (2.56)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа; $f(x)$ — определенная и непрерывная функция x.

Линейное дифференциальное уравнение (2.56) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из степенных, показательных

и тригонометрических функций. Как известно, для получения общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения достаточно к частному решению прибавить общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения. Для линейных неоднородных дифференциальных уравнений (2.56), правая часть $f(x)$ которых имеет специальный вид, частное решение может быть найдено *методом неопределенных коэффициентов*, исходя из заранее известного вида свободного члена линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.56).

Случай 1. Свободный член $f(x)=P(x)$, где $P(x)$ — многочлен m-й степени x, который, в частности, может быть постоянным числом.

1. Если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2.56) ищется в виде

$$y_1=Q(x), \tag{2.57}$$

где $Q(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$, а A_0, A_1, A_2, ..., A_{m-1}, A_m — неопределенные коэффициенты, которые следует найти.

2. Если число 0 является корнем характеристического уравнения кратности k, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_1=x^kQ(x). \tag{2.57'}$$

Случай 2. Свободный член $f(x)=P(x)e^{ax}$.

1. Если число a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_1=Q(x)e^{ax}. \tag{2.58}$$

2. Если число a является корнем характеристического уравнения кратности k, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_1=x^kQ(x)e^{ax}. \tag{2.58'}$$

Случай 3. Свободный член $f(x)=[P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx]e^{ax}$, где a, b — постоянные числа; $P_1(x)$, $P_2(x)$ — многочлены от x, различных степеней, которые, в частности, могут быть постоянными числами (один из них может быть нулем).

Пусть m — наибольшая из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$.

1. Если комплексные числа $a\pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_1=[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx]e^{ax}, \tag{2.59}$$

где

$$Q_1(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$
$$Q_2(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m$$

— многочлены степени m от x; A_0, A_1, ..., A_{m-1}, A_m и B_0, B_1, ..., B_{m-1}, B_m — неопределенные коэффициенты, подлежащие определению.

2. Если комплексные числа $a \pm bi$ являются корнями характеристического уравнения кратности k, то частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения ищется в виде

$$y_1 = x^k [Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx] e^{ax}. \quad (2.59')$$

Случай 4. Свободный член $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ — функции рассмотренных выше типов.

Если y_1, y_2, ..., y_m — частные решения, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$, то частное решение всего неоднородного линейного уравнения (2.56) ищем в виде

$$Y_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_m. \quad (2.60)$$

II. Уравнения второго порядка. В частном случае линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (2.61)$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция x или (в частном случае) постоянное число.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения Y является суммой общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (y) и одного частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (y_1):

$$Y = y + y_1.$$

Вид частного решения зависит от вида правой части линейного дифференциального уравнения.

Случай 1. Правая часть линейного дифференциального уравнения является многочленом вида

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m.$$

Тогда

$$y_1 = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m. \quad (2.62)$$

Если характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю кратности k ($k = 1, 2$), то

$$y_1 = x^k (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m). \quad (2.62')$$

Случай 2. Правая часть линейного дифференциального уравнения является показательной функцией вида $f(x) = ae^{px}$, где a — постоянная величина или многочлен от x. Тогда

$$y_1 = Ae^{px}, \quad (2.63)$$

где A — постоянная или многочлен от x.

В случае, если характеристическое уравнение имеет корень p кратности k ($k=1, 2$), то

$$y_1 = Ax^k e^{px}. \tag{2.63'}$$

Случай 3. Правая часть линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = a_1 \sin bx + a_2 \cos bx.$$

Тогда

$$y_1 = A_1 \sin bx + A_2 \cos bx. \tag{2.64}$$

Если характеристическое уравнение имеет корни $a \pm bi$ кратности k, то

$$y_1 = x^k (A_1 \sin bx + A_2 \cos bx). \tag{2.64'}$$

Если правая часть

$$f(x) = e^{ax} (c_1 \sin bx + c_2 \cos bx),$$

то

$$y_1 = e^{ax} (D_1 \sin bx + D_2 \cos bx). \tag{2.65}$$

Здесь c_1, c_2 и соответственно D_1 и D_2 могут быть многочленами от x или постоянными величинами.

В случае, если характеристическое уравнение имеет комплексные корни $a+bi$ и $a-bi$ кратности k, то

$$y_1 = x^k e^{ax} (D_1 \sin bx + D_2 \cos bx). \tag{2.65'}$$

Случай 4. Если правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения (2.61) является суммой функций рассмотренных видов, то частное решение y_1 равно сумме соответствующих функций.

Коэффициенты A, A_0, A_1, A_2, ..., A_m, D_1, D_2 подлежат определению. Они должны определяться так, чтобы y_1 действительно было частным решением линейного дифференциального уравнения (2.61). После подстановки y_1 в линейное дифференциальное уравнение (2.61) оно должно обращаться в тождество, из которого сравнением коэффициентов при подобных членах в обеих частях определяются искомые коэффициенты или многочлены.

Пример 1. Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x.$$

Решение. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - r = 0$$

имеет действительные различные корни $r_1=0$, $r_2=1$. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y=C_1+C_2e^x.$$

Для нахождения частного решения данного линейного неоднородного дифференциального уравнения, ищем частные решения для каждого из трех уравнений $y''-y'=e^x$, $y''-y'=e^{2x}$, $y''-y'=x$.

Частное решение первого из этих уравнений имеет вид $y_1=Axe^x$, так как коэффициент при x показательной функции e^x (равный единице) совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Поскольку $y_1'=Ae^x+Axe^x$, $y_1''=2Ae^x+Axe^x$, то подставляя эти значения в первое из трех уравнений, имеем

$$2Ae^x+Axe^x-Ae^x-Axe^x=e^x,$$

или

$$Ae^x=e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при e^x в левой и правой частях равенства, получаем $A=1$. Следовательно, частное решение первого из уравнений имеет вид.

$$y_1=xe^x. \qquad \text{(а)}$$

Частное решение второго из уравнений имеет вид

$$y_2=Ae^{2x},$$

так как коэффициент при x показательной функции e^{2x}, равный двум, не совпадает с корнями характеристического уравнения. Поскольку

$$y_2'=2Ae^{2x}, \quad y_2''=4Ae^{2x},$$

то, подставляя эти значения во второе из уравнений, имеем

$$4Ae^{2x}-2Ae^{2x}=e^{2x},$$

или

$$2Ae^{2x}=e^{2x}.$$

Приравнивая коэффициенты при e^{2x} в левой и правой частях равенства, получаем $A=1/2$. Частное решение второго уравнения имеет вид

$$y_2=\frac{1}{2}e^{2x}. \qquad \text{(б}$$

Частное решение третьего из уравнений имеет вид

$$y_3=x(Ax+B),$$

так как коэффициент при x показательной функции $e^{0\cdot x}=e^0=1$, равный нулю, совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Поскольку

$$y_3'=2Ax+B, \quad y_3''=2A,$$

то, подставляя эти значения в третье из уравнений, имеем

$$2A-2Ax-B=x,$$

или

$$-2Ax+2A-B=x.$$

Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены в левой и правой частях равенства, получаем систему

$$\left.\begin{aligned}-2A&=1,\\ 2A-B&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда находим $A=-\frac{1}{2}$, $B=-1$.

Частное решение третьего из уравнений

$$y_3=-x\left(\frac{1}{2}x+1\right). \qquad \text{(в)}$$

Суммируя частные решения (а), (б) и (в), получаем частное решение y_1 всего данного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y_1=xe^x+\frac{1}{2}e^{2x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

Итак, общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$Y=y+y_1=C_1+C_2e^x+xe^x+\frac{1}{2}e^{2x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)=$$
$$=C_1+(C_2+x)e^x+\frac{1}{2}e^{2x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

Пример 2. Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y''+y=\sin x+\cos 2x.$$

Решение. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y''+y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2+1=0$$

имеет мнимые корни $r_{1,2}=\pm i$. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, правая часть которого есть первое слагаемое ($\sin x$), т. е. уравнения

$$y''+y=\sin x,$$

имеет вид

$$y_1 = x(A\cos x + B\sin x),$$

так как комплексные числа $a \pm bi = 0 \pm 1i = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения.

Поскольку

$$y_1' = (B - Ax)\sin x + (A + Bx)\cos x,$$
$$y_1'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$

то подставляя значения y_1'' и y_1 в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях равенства, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} -2A &= 1, \\ 2B &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Следовательно, частное решение

$$y_1 = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, правая часть которого есть второе слагаемое ($\cos 2x$), т. е. уравнения

$$y'' + y = \cos 2x$$

имеет вид

$$y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

так как комплексные числа $a \pm bi = 0 \pm 2i = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Поскольку

$$y_2' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$y_2'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$

то, подставляя значения y_2'' и y_2 в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} -3A &= 1, \\ -3B &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$. Следовательно, частное решение

$$y_2 = -\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x =$$
$$= \left(C_1 - \frac{x}{2}\right) \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x.$$

Пример 3. Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 13x^3 - 57x^2 - 10x + 70.$$

Решение. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y''' - 7y'' + 19y' - 13y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^3 - 7r^2 + 19r - 13 = 0.$$

Замечаем, что один из корней характеристического уравнения $r_1 = 1$. Чтобы найти остальные корни, разделим многочлен в левой части характеристического уравнения на $r - 1$ и получим

$$r^2 - 6r + 13.$$

Итак, характеристическое уравнение имеет вид

$$r^3 - 7r^2 + 19r - 13 \equiv (r - 1)(r^2 - 6r + 13).$$

Следовательно, корни характеристического уравнения $r_1 = 1$; $r_2 = 3 + 2i$, $r_3 = 3 - 2i$. Общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^x + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

Ищем частное решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Дифференцируя трижды частное решение, находим

$$y_1' = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$y_1'' = 6ax + 2b,$$
$$y_1''' = 6a.$$

Подставляя найденные выражения производных в заданное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, имеем

$$6a - 7(6ax + 2b) + 19(3ax^2 + 2bx + c) - 13(ax^3 + bx^2 + cx + d) \equiv$$
$$\equiv 13x^3 - 57x^2 - 10x + 70.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при неизвестных в обеих частях тождества, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 6a-14b+19c-13d&=70,\\ -42a+38b-13c&=-10,\\ 57a-13b&=-57,\\ -13a&=13. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $a=-1$, $b=0$, $c=4$, $d=0$. Следовательно,

$$y_1=-x^3+4x.$$

Итак, общее решение данного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$Y=y+y_1=C_1e^x+e^{3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)-x^3+4x.$$

Пример 4. Проинтегрировать методом вариации постоянных линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$y'''-y'=e^{2x}.$$

Решение. Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'''-y'=0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^3-r=r(r^2-1)=0.$$

Корни характеристического уравнения $r_1=0$, $r_{2,3}=\pm 1$ являются действительными различными числами. Следовательно, общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y(x)=C_1e^0+C_2e^x+C_3e^{-x}=C_1\cdot 1+C_2e^x+C_3e^{-x}.$$

Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y(x)=C_1(x)\cdot 1+C_2(x)e^x+C_3(x)e^{-x},$$

т. е. полагаем произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 искомыми функциями x: $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$.

Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned} y'=C_1'(x)\cdot 1+C_1(x)\cdot 0+C_2'(x)e^x+C_2(x)e^x+C_3'(x)e^{-x}-\\ -C_3(x)e^{-x}=C_1(x)\cdot 0+C_2(x)e^x+C_3(x)e^{-x}+\\ +1\cdot C_1'(x)+C_2'(x)e^x+C_3'(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Налагаем на неизвестные функции дополнительное условие:

$$C_1'(x)\cdot 1+C_2'(x)e^x+C_3'(x)e^{-x}=0. \qquad (1)$$

Тогда

$$y'=C_1(x)\cdot 0+C_2(x)e^x-C_3(x)e^{-x}.$$

Вторая производная

$$y'' = C_1'(x)\cdot 0 + C_1(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x + C_2(x)\,e^x - \\ - C_3'(x)\,e^{-x} + C_3(x)\,e^{-x} = C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\,e^x + \\ + C_3(x)\,e^{-x} + C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x - C_3'(x)\,e^{-x}.$$

В полученном выражении налагаем дополнительное условие:

$$C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x - C_3'(x)\,e^{-x} = 0, \qquad (2)$$

Тогда

$$y'' = C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\,e^x + C_3(x)\,e^{-x}.$$

Находим третью производную:

$$y''' = C_1'(x)\cdot 0 + C_1(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x + C_2(x)\,e^x + C_3'(x)\,e^{-x} - \\ - C_3(x)\,e^{-x} = C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\,e^x - C_3(x)\,e^{-x} + \\ + C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x + C_3'(x)\,e^{-x}.$$

Подставляя выражения y''' и y' в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\,e^x - C_3(x)\,e^{-x} + C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x + \\ + C_3'(x)\,e^{-x} - C_1(x)\cdot 0 - C_2(x)\,e^x + C_3(x)\,e^{-x} = e^{2x},$$

откуда

$$C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\,e^x + C_3'(x)\,e^{-x} = e^{2x}. \qquad (3)$$

Для определения трех неизвестных функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ и $C_3'(x)$, получаем неоднородную систему алгебраических уравнений (1)—(3)

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot e^x + C_3'(x)\cdot e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\cdot e^x - C_3'(x)\cdot e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\cdot e^x + C_3'(x)\cdot e^{-x} &= e^{2x}. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 1\,(e^x\cdot e^{-x} + e^x\cdot e^{-x}) = e^0 + e^0 = 2 \neq 0.$$

Решение системы находим по правилу Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ e^{2x} & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{2}(-e^0 - e^0) = -e^{2x};$$

$$C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + e^x) = \frac{1}{2}e^x;$$

$$C_3'(x) = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(e^{3x} - 0) = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Тогда

$$C_1(x) = -\int e^{2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1^*;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int e^{x}\,dx = \frac{e^x}{2} + C_2^*;$$

$$C_3(x) = \frac{1}{2}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{6}e^{3x} + C_3^*.$$

Искомое решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)\,e^{x} + C_3(x)\,e^{-x} =$$
$$= C_1^* + C_2^* e^{x} + C_3^* e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{2x}\right) =$$
$$= (C_1^* + C_2^* e^{x} + C_3^* e^{-x}) + \frac{1}{6}e^{2x}.$$

Здесь $C_1^* + C_2^* e^{x} + C_3^* e^{-x}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, а $\frac{1}{6}e^{2x}$ — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Задача. Найти закон движения материальной частицы массы m под влиянием восстанавливающей силы (силы, направленной

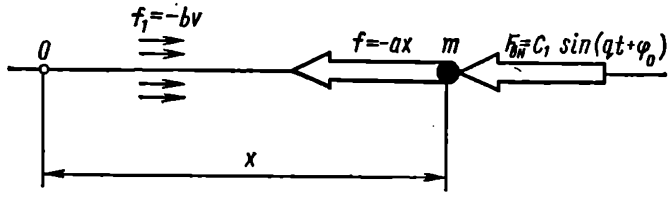


Рис. 28

к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O), силы сопротивления и внешней силы $F_{вн} = c_1 \sin(qt + \varphi_0)$.

Примечание. Если материальная частица массы m движется под действием восстанавливающей силы в среде с сопротивлением f_1, пропорциональным скорости v, т. е. $f_1 = -bv$, то f_1 назовем силой сопротивления, а величину $h = \frac{b}{2m}$ — коэффициентом сопротивления.

Решение. Кроме восстанавливающей силы $f = -ax$ и силы сопротивления $f_1 = -bv$ на частицу действует еще внешняя сила $F_{вн} = c_1 \sin(qt + \varphi_0)$. Как видно из рис. 28 *, равнодействующая всех сил

$$R = F_{вн} + f + f_1 = c_1 \sin(qt + \varphi_0) - ax - bv.$$

*) На рис. 28 силы f_1 и $F_{вн}$ должны быть направлены в противоположную сторону.

На основании второго закона динамики $R = m\frac{d^2x}{dt^2}$ и дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + ax = c_1 \sin(qt + \varphi_0),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = c_1 \sin(qt + \varphi_0), \qquad (*)$$

где $2h = b/m$, $k^2 = a/m$. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решим его для случая $h^2 - k^2 < 0$ (малое сопротивление). Пусть

$$h^2 - k^2 = -p^2.$$

Тогда

$$r_1 = -h + pi, \quad r_2 = -h - pi.$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (*)

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0$$

имеет комплексные корни $r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} = -h \pm \sqrt{-p^2} = -h \pm pi$.

В случае комплексных корней общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$x = e^{-ht}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt),$$

или

$$x = C_1 e^{-ht}\left(\sin pt + \frac{C_2}{C_1}\cos pt\right).$$

Введем вспомогательный угол φ:

$$\frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Имеем

$$x = \frac{C_1}{\cos\varphi} e^{-ht}(\cos\varphi \sin pt + \sin\varphi \cos pt).$$

Обозначая $\frac{C_1}{\cos\varphi} = A$, получаем

$$x = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi).$$

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (*) будем искать в виде вспомогательной функции

$$V = M \sin(qt + \varphi_0) + N \cos(qt + \varphi_0).$$

Найдем ее производные:

$$\frac{dV}{dt} = Mq \cos(qt + \varphi_0) - Nq \sin(qt + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -Mq^2 \sin(qt + \varphi_0) - Nq^2 \cos(qt + \varphi_0).$$

Подставляя эти соотношения в дифференциальное уравнение (*), приходим к равенству

$$-Mq^2\sin(qt+\varphi_0)-Nq^2\cos(qt+\varphi_0)+2hMq\cos(qt+\varphi_0)-$$
$$-2hNq\sin(qt+\varphi_0)+k^2M\sin(qt+\varphi_0)+k^2N\cos(qt+\varphi_0)=$$
$$=c\sin(qt+\varphi_0),$$

или

$$(k^2M-Mq^2-2hNq)\sin(qt+\varphi_0)+(k^2N-Nq^2+2hMq)\cos(qt+\varphi_0)=$$
$$=c\sin(qt+\varphi_0).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}k^2M-Mq^2-2hNq&=c,\\k^2N-Nq^2+2hMq&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим

$$N=-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2},$$

$$M=\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2}.$$

Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+$$
$$+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\sin(qt+\varphi_0)-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\cos(qt+\varphi_0)$$

или

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\left[\sin(qt+\varphi_0)-\frac{2hq}{k^2-h^2}\cos(qt+\varphi_0)\right].$$

Вводя с помощью соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{2hq}{k^2-h^2}$$

вспомогательный угол φ_1 и обозначая

$$\frac{c(k^2-q^2)}{[4h^2q^2+(k^2-q^2)^2]\cos\varphi_1}=B,$$

окончательно получим

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+B\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1).$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y''-y=x^2-x+1$.
   Ответ. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2+x-3$.
2. $y''+5y'+6y=3$.
   Ответ. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}$.

3. $y'' + y = 4e^x$.
Отв. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$.
4. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.
Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} xe^{3x} + 3x^2 + 2x$.
5. $y'' - y' + y = -13 \sin 2x$.
Отв. $y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{\frac{x}{2}} + 3 \sin 2x - 2 \cos 2x$.
6. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.
Отв. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$.
7. $y^{IV} - 4y'' = 2$.
Отв. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} - \frac{1}{4} x^2$.
8. $y'' - y = 2x$.
Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2x$.
9. $y'' - 6y' + 5y = x^2$.
Отв. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + \frac{1}{5} x^2 + \frac{12}{25} x + \frac{62}{125}$.
10. $y'' + 2y' = 36 \cos x$.
Отв. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{36}{5} \cos x + \frac{72}{5} \sin x$.
11. $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^4 - 3x + 5$.
Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{15}{4} x^2 + \frac{27}{4} x + \frac{67}{8}$.
12. $y''' + y'' - 5y' + 3y = x^3 - x + 1$.
Отв. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3} x^2 + \frac{41}{9} x + \frac{166}{27}$.
13. $y^{IV} + 3y'' - 4y = \sin 2x + 6e^{3x}$.
Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x + \frac{3}{52} e^{3x} + \frac{1}{20} x \cos 2x$.
14. $y''' - 2y'' - 3y' = 3 \sin x$.
Отв. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-x} + \frac{3}{10} \sin x + \frac{3}{5} \cos x$.
15. $y^{IV} - y = -2 \sin 2x + \cos 2x$.
Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{\cos 2x - 2 \sin 2x}{15}$.
16. $y^{IV} + 4y'' = \sin x - 2 \cos 3x$.
Отв. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{3} \sin x - \frac{2}{45} \cos 3x$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

17. $y''' + 9y' = 2 \cos 3x$.
Отв. $y = -\frac{1}{9} x \cos 3x$.
18. $y^{IV} + 2y'' + y = -\sin x$.
Отв. $y = x^2 \sin \frac{x}{8}$.
19. $y^{IV} + 4y'' = -\cos 2x$.
Отв. $y = \frac{1}{16} x \sin 2x$.
20. $y^{IV} + 5y'' + 4y = \cos x + \sin 3x$.
Отв. $y = \frac{1}{6} x \sin x + \frac{1}{40} \sin 3x$.

21. $y''' - 6y'' + 9y' = 2e^{3x}$.

Отв. $y = \frac{1}{3} x^2 e^{3x}$.

22. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 0,$$

удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Отв. $y = e^x$.

23. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Отв. $y = \sin x$.

24. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''' - y' = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = 0$ при $x = 2$.

Отв. $y = 1$.

25. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Отв. $y = x^3 + x^2 + x$.

§ 8. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, кроме рассмотренных случаев уравнений со специальными простыми правыми частями, достаточно сложно.

Общий метод нахождения частного решения, а, следовательно, и общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка, называется *методом вариации n произвольных постоянных (методом Лагранжа)*.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \qquad (2.66)$$

Пусть общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.67)$$

имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n, \qquad (2.68)$$

где y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения; C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n — произвольные постоянные.

Метод Лагранжа состоит в том, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.66) ищется в таком же виде, как и общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2.68), с помощью замены

произвольных постоянных некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями x (вариации произвольных постоянных), т. е. в виде

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)\,y_n, \tag{2.69}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2.67).

Искомые функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ должны удовлетворять только соотношению, получаемому в результате подстановки функции (2.69) в дифференциальное уравнение (2.66). Следовательно, для нахождения функций $C_i(x)$ можно подчинить их любым $n-1$ условиям.

Чтобы получить наиболее простую систему для определения искомых функций $C_i(x)$, вычисляют последовательные производные y', y'', y''', ..., $y^{(n-1)}$ выражения (2.69), одновременно подчиняя неизвестные функции дополнительным условиям, которые упрощают вид последовательных производных, т. е. полагают равной нулю совокупность членов, содержащих $C_i'(x)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
y &= C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)\,y_n,\\
y' &= C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2' + \ldots + C_n(x)\,y_n' + \\
&\underline{+ C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \ldots + C_n'(x)\,y_n,}\\
&\quad 0\\
y'' &= C_1(x)\,y_1'' + C_2(x)\,y_2'' + \ldots + C_n(x)\,y_n'' + \\
&\underline{+ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \ldots + C_n'(x)\,y_n',}\\
&\quad 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(n-1)} &= C_1(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)\,y_n^{(n-1)} + \\
&\underline{+ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)},}\\
&\quad 0\\
y^{(n)} &= C_1(x)\,y_1^{(n)} + C_2(x)\,y_2^{(n)} + \ldots + C_n(x)\,y_n^{(n)} + \\
&+ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Подставим найденные значения функции и ее последующих производных в дифференциальное уравнение (2.66). Для этого равенства (2.70) умножим соответственно на постоянные коэффициенты a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, 1, сложим почленно и приравняем правую часть полученного равенства правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.66):

$$\begin{aligned}
&C_1(x)\left[y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1\right] + \\
&+ C_2(x)\left[y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2\right] + \\
&+ \ldots + C_n(x)\left[y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + a_2 y_n^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_n' + a_n y_n\right] + \\
&+ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Так как

$$y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1 =$$
$$= y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2 = \ldots =$$
$$= y_n^{(n)} + a_1 y_n^{(n-1)} + a_2 y_n^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y_n' + a_n y_n \equiv 0,$$

то равенство (2.71) позволяет наложить еще одно условие на неизвестные функции:

$$C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Итак, для определения искомых функций $C_i(x)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{c} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 + \ldots + C_n'(x)\, y_n = 0, \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + \ldots + C_n'(x)\, y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x), \end{array}\right\}$$

которая является алгебраической линейной неоднородной системой относительно первых производных неизвестных функций $C_i'(x)$. Разрешая эту систему относительно $C_i'(x)$, находим

$$C_i'(x) = \varphi_i(x),$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. После интегрирования имеем

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + C_i^*, \qquad (2.72)$$

где C_i^* — произвольные постоянные.

Найденные функции (2.72) подставим в равенство (2.69), в результате получим общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.66):

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n = \left[\int \varphi_1(x)\, dx + C_1^*\right] y_1 +$$
$$+ \left[\varphi_2(x)\, dx + C_2^*\right] y_2 + \ldots + \left[\int \varphi_n(x)\, dx + C_n^*\right] y_n =$$
$$= \underbrace{C_1^* y_1 + C_2^* y_2 + \ldots + C_n^* y_n}_{\text{общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (2.67)}} + \underbrace{\int \varphi_1(x)\, dx \cdot y_1 + \ldots + \int \varphi_n(x)\, dx \cdot y_n}_{\text{частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.66)}}.$$

Полагая $C_1^* = C_2^* = \ldots = C_n^* = 0$, найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.66):

$$y_4 = \int \varphi_1(x)\, dx \cdot y_1 + \int \varphi_2(x)\, dx \cdot y_2 + \ldots + \int \varphi_n(x)\, dx \cdot y_n.$$

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Решение. По виду правой части данного дифференциального уравнения можно заключить, что метод неопределенных коэффициентов применить нельзя. Для нахождения общего решения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' - y = 0.$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2 - 1 = 0$$

и найдем его корни: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Следовательно, фундаментальная система решений есть

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-x}. \qquad (*)$$

Составляем систему

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\,(e^x)' + C_2'(x)\,(e^{-x})' &= \frac{e^x}{1+e^x}, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\, e^x - C_2'(x)\, e^{-x} &= \frac{e^x}{1+e^x}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно $C_i'(x)$ $(i = 1, 2)$, находим

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+e^x}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

В результате интегрирования дифференциальных уравнений

$$dC_1(x) = \frac{dx}{2(1+e^x)},$$

$$dC_2(x) = -\frac{e^{2x}\,dx}{2(1+e^x)}$$

имеем

$$C_1(x) = -\frac{x}{2} + \ln\sqrt{1+e^x} + C_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{e^x}{2} + \ln\sqrt{1+e^x} + C_2.$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в искомое общее решение (*), получим

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \ln \sqrt{1 + e^x} - \frac{1}{2}(xe^x + 1).$$

Упражнения

Проинтегрировать методом вариации постоянных дифференциальные уравнения:

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Отв. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \frac{x}{2} \sin 2x$.

2. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Отв. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln |\cos x| + \sin x\,(x - \operatorname{tg} x)$.

3. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

Отв. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{x}$.

4. $y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3} e^x$.

Отв. $y = C_1 + C_2 e^x + \frac{e^x}{x}$.

5. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$.

6. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (e^x + e^{-x}) \ln (1 - e^{-x}) + xe^{-x} + 1$.

7. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

Отв. $y = e^{2x} [(\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x]$.

8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$.

Отв. $y = e^x \left[(C_1 - \ln x) + \left(C_2 - \frac{1}{x} \right) x \right]$.

§ 9. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x). \quad (2.73)$$

В некоторых случаях эти дифференциальные уравнения могут быть преобразованы с помощью удачно выбранной подстановки к линейным дифференциальным уравнениям, которые, в свою очередь, могут быть легко интегрируемы.

Случай 1. Замена независимой переменной в линейном однородном дифференциальном уравнении. Любое линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+p_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0 \quad (2.73')$$

можно привести к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, заменяя независимую переменную x подстановкой

$$t=c\int\sqrt[n]{p_n(x)}\,dx. \quad (2.74)$$

Случай 2. Дифференциальное уравнение Эйлера. Линейное дифференциальное уравнение Эйлера (однородное или неоднородное) вида

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=\begin{cases} f(x), \\ 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

на основании зависимости (2.74) с помощью подстановки

$$x=e^t \quad (\text{при } x>0)$$

или

$$x=-e^t \quad (\text{при } x<0),$$

приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (однородному или неоднородному).

В частности, дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка

$$a_0x^2y''+a_1xy'+a_2y=\begin{cases} f(x), \\ 0, \end{cases}$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные, может быть однородным или неоднородным. С помощью подстановки $x=e^t$ это дифференциальное уравнение приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)}{d(e^t)}=\frac{\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}}{e^t}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{e^{2t}}.$$

Случай 3. Обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера. Для интегрирования дифференциального уравнения вида

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+a_2(ax+b)^{n-2}y^{(n-2)}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(ax+b)\,y'+a_ny=f(x), \quad (2.76)$$

где a_1, a_2, ..., a_n, a и b — постоянные, вводят подстановку

$$ax+b=e^t.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right),$$

. . . . . .

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (2.76), получим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

В частности, обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка вида

$$A_0(ax+b)^2y'' + A_1(ax+b)y' + A_2y = f(x),$$

где A_0, A_1, A_2, a и b — постоянные коэффициенты, приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки

$$ax+b = e^t.$$

Случай 4. Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения при помощи известных частных решений. Если для дифференциального уравнения (2.73) известно частное решение y_1, то с помощью подстановки

$$y = y_1\int z\,dx, \tag{2.77}$$

где z — новая неизвестная функция, дифференциальное уравнение (2.73′) приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка.

В частности, для определения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — определенные непрерывные функции x, достаточно знать одно частное решение; второе же частное решение определяется по формуле

$$y_2 = Ay_1\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2},$$

где A — произвольная постоянная.

Если известно k линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (2.73′), то порядок этого дифференциального уравнения можно понизить на k единиц.

Случай 5. Определение частного решения однородного дифференциального уравнения в форме функции заданного вида. Ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{2.78}$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ — многочлены. Частное решение такого дифференциального уравнения можно найти в виде многочлена n-й степени

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \qquad (2.79)$$

где a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя частное решение (2.79) в дифференциальное уравнение (2.78), приравниваем нулю коэффициент старшей степени x и находим уравнение для определения n. После этого составляем многочлен степени n, неопределенные коэффициенты которого находятся подстановкой этого многочлена в заданное дифференциальное уравнение. Частное решение дифференциального уравнения (2.78) иногда имеет вид дробной рациональной функции.

Таким образом, линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

решается путем предварительного нахождения общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

указанными выше приемами.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_ч, \qquad (2.80)$$

где y_1, y_2 — частные линейно независимые решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, $y_ч$ — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Решение. Пусть $x = e^t$. Выражая производные y по x через производные по новой независимой переменной t, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Подставляя найденные значения производных в заданное дифференциальное уравнение, получаем следующее дифференцнальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t},$$

или

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0,$$

если известно его частное решение $y_1=x$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение делим на коэффициент при y'' и приводим его к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''-\frac{1}{x(\ln x-1)}y'+\frac{1}{x^2(\ln x-1)}y=0.$$

Тогда второе частное решение имеет вид

$$y_2=y_1\int\frac{e^{\int -p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx=x\int\frac{e^{\int\frac{dx}{x(\ln x-1)}}}{x^2}\,dx=x\int\frac{e^{\int\frac{d(\ln x-1)}{\ln x-1}}}{x^2}\,dx=$$
$$=x\int\frac{e^{\ln(\ln x-1)}}{x^2}\,dx=x\int\frac{\ln x-1}{x^2}\,dx=x\int x^{-2}\ln x\,dx-x\int\frac{dx}{x^2}=$$
$$=x\left(-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x}\frac{dx}{x}\right)-x\int\frac{dx}{x^2}=-\ln x+x\int\frac{dx}{x^2}-x\int\frac{dx}{x^2}=-\ln x.$$

Общее решение заданного дифференциального уравнения

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x+C_2\ln x.$$

Пример 3. Найти в виде многочлена частное решение дифференциального уравнения

$$(x^3-3x^2+1)y''-(x^3-6x+1)y'+(3x^2-6x)y=0.$$

Решение. Частное решение будем искать в виде многочлена

$$y_1=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

причем показатель степени n пока неизвестен. Производные частного решения

$$y_1'=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a_{n-1},$$
$$y_1''=n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+$$
$$+a_2(n-2)(n-3)x^{n-4}+\ldots+a_{n-2}.$$

Подставляя многочлен и его производные в заданное дифференциальное уравнение, получаем

$$(x^3-3x^2+1)[n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+$$
$$+a_2(n-2)(n-3)x^{n-4}+\ldots+a_{n-2}]-(x^3-6x+1)\times$$
$$\times[nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}]+$$
$$+(3x^2-6x)(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n).$$

Выполняя указанные алгебраические действия и группируя члены по наибольшим степеням x, имеем

$$n(n-1)x^{n+1}+a_1(n-1)(n-2)x^n+\ldots-3n(n-1)x^n-$$
$$-3a_1(n-1)(n-2)x^{n-1}+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+$$
$$+\ldots-nx^{n+2}-a_1(n-1)x^{n+1}-a_2(n-2)x^n+\ldots+6nx^n+$$
$$+6a_1(n-1)x^{n-1}+\ldots-nx^{n-1}-a_1(n-1)x^{n-2}-\ldots+3x^{n+2}+$$
$$+3a_1x^{n+1}+3a_2x^n+\ldots-6x^{n+1}-6a_1x^n-6a_2x^{n-1}-\ldots=(-n+3)x^{n+2}+$$
$$+[n(n-1)-a_1^*(n-1)+3a_1-6]x^{n+1}+$$
$$+[a_1(n-1)(n-2)-3n(n-1)-a_2(n-2)+6n+3a_2-6a_1]x^n+\ldots.$$

Приравнивая нулю коэффициент при x^{n+2}, получаем уравнение для определения показателя степени:

$$-n+3=0,$$

откуда находим $n=3$.

Итак, если частное решение в виде многочлена существует, то последний может быть только третьей степени. Пусть

$$y_1=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

Подставляя этот многочлен и его производные в заданное уравнение, имеем

$$(x^3-3x^2+1)(6x+2a_1)-(x^3-6x+1)(3x^2+2a_1x+a_2)+$$
$$+(3x^2-6x)(x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)=0.$$

Перемножая и приравнивая нулю свободный член и коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x, получаем систему

$$\left.\begin{aligned}
&6-2a_1+3a_1-6 &&=0,\\
&-18+2a_1-a_2+18+3a_2-6a_1 &&=0,\\
&-6a_1+12a_1-3+3a_3-6a_2 &&=0,\\
&6+6a_2-2a_1-6a_3 &&=0,\\
&2a_1-a_2 &&=0.
\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $a_1=a_2=0$, $a_3=1$. Искомое частное решение имеет вид

$$y_1=x_3+1.$$

Упражнения

Проинтегрировать дифференциальные уравнения Эйлера:

1. $x^2y''-3xy'+3y=0$.

Отв. $y=C_1x+C_2x^3$.

2. $x^2y''+xy'-y=0$.

Отв. $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$.

3. $x^2y''+xy'-\dfrac{1}{4}y=0$.

Отв. $y=C_1\sqrt{x}+\dfrac{C_2}{\sqrt{x}}$.

4. $xy''-y'=0$.
Ответ. $y=C_1+C_2x^2$.
5. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$.
Ответ. $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, используя заданные частные решения:

6. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$; $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

Ответ. $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$.

7. $(\sin x-\cos x)y''-2\sin x\cdot y'+(\cos x+\sin x)y=0$; $y_1=e^x$.
Ответ. $y=C_1e^x+C_2\sin x$.
8. $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{4}y=0$; $y_1=\sqrt{1+x}$.

Ответ. $y=C_1\sqrt{1+x}+C_2\sqrt{1-x}$.

Найти частные решения в виде многочлена и проинтегрировать дифференциальные уравнения:

9. $(x-1)y''-(x+1)y'+2y=0$.
Ответ. $y_1=x^2+1$; $y=C_1(x^2+1)+C_2e^x$.
10. $(x^2-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y=0$.
Ответ. $y_1=x^3$, $y=C_1x^3+C_2e^x$.

§ 10. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ

Метод вариации постоянных (метод Лагранжа) можно использовать для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с любыми коэффициентами, если известна фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Будем искать общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \quad (2.81)$$

в таком же виде, как и общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \quad (2.8$$

заменяя при этом произвольные постоянные C_i некоторыми функциями x, т. е. в виде

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n, \quad (2.8$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Применяем метод вариации произвольных постоянных аналогично тому, как делалось для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Вычисляем последовательные производные $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$, умножаем их соответственно на переменные коэффициенты $p_n(x), p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \ldots, p_2(x), p_1(x)$, 1 и подставляем в рассматриваемое линейное неоднородное дифференциальное уравнение (2.81). Складывая по

членно и приравнивая правую часть полученного равенства правой части дифференциального уравнения (2.81), получаем

$$C_1(x)\left[y_1^{(n)}+p_1(x)\,y_1^{(n-1)}+p_2(x)\,y_1^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_1'+p_n(x)\,y_1\right]+$$
$$C_2(x)\left[y_2^{(n)}+p_1(x)\,y_2^{(n-1)}+p_2(x)\,y_2^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_2'+p_n(x)\,y_2\right]+$$
$$+\ldots+C_n(x)\left[y_n^{(n)}+p_1(x)\,y_n^{(n-1)}+p_2(x)\,y_n^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_n'+\right.$$
$$\left.+p_n(x)\,y_n\right]+C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x). \tag{2.84}$$

Так как

$$y_1^{(n)}+p_1(x)\,y_1^{(n-1)}+p_2(x)\,y_1^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_1'+p_n(x)\,y_1=$$
$$=y_2^{(n)}+p_1(x)\,y_2^{(n-1)}+p_2(x)\,y_2^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_2'+p_n(x)\,y_2=\ldots=$$
$$=y_n^{(n)}+p_1(x)\,y_n^{(n-1)}+p_2(x)\,y_n^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y_n'+p_n(x)\,y_n\equiv 0,$$

то зависимость (2.84) принимает вид

$$C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x). \tag{2.85}$$

Для нахождения функций $C_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ составляем систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2+\ldots+C_n'(x)\,y_n=0,\\
&C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'+\ldots+C_n'(x)\,y_n'=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}=0,\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}=f(x).
\end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

Решая эту систему относительно производных искомых функций $C_i'(x)$, находим

$$C_1'(x)=\varphi_1(x),\ C_2'(x)=\varphi_2(x),\ \ldots,\ C_n'(x)=\varphi_n(x). \tag{2.87}$$

Интегрируя полученные соотношения, получаем

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)\,dx+C_1,$$
$$C_2(x)=\int\varphi_2(x)\,dx+C_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(x)=\int\varphi_n(x)\,dx+C_n.$$

Подставляя найденные значения в искомое решение (2.83), имеем

$$y=y_1\int\varphi_1(x)\,dx+y_2\int\varphi_2(x)\,dx+\ldots+y_n\int\varphi_n(x)\,dx+C_1y_1+$$
$$+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{2.88}$$

Уравнение (2.88) является общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.81).

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнени второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x) = f(x). \tag{2.8}$$

Методом вариации произвольных постоянных проинтегрируе это дифференцированное уравнение, если известно общее решени соответствующего линейного однородного дифференциального ура нения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2.9}$$

считая теперь C_1 и C_2 уже не постоянными, а неизвестными фун циями $C_1(x)$ и $C_2(x)$, т. е. полагая

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2. \tag{2.9}$$

Тогда, дифференцируя равенство (2.91), имеем

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' = (C_1' y_1 + C_2' y_2) + (C_1 y_1' + C_2 y_2'). \tag{2.92}$$

Наложим дополнительное условие:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \tag{2.93}$$

В этом случае первая производная упрощается и принимает ви

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'. \tag{2.94}$$

Дифференцируя еще раз равенство (2.94), имеем

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'. \tag{2.95}$$

Подставляя выражения (2.91), (2.94) и (2.95) в дифференциально уравнение (2.89), получаем

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2 + p(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] = f(x)$$

или

$$C_1[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + C_2[y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2] + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Все члены, содержащие C_1, взаимно уничтожаются, так как функ ция $y = y_1(x)$ есть также решение линейного однородного дифферен циального уравнения

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0,$$

следовательно, выражение, заключенное в первых квадратных скоб ках, равно нулю, поскольку

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0.$$

Взаимно уничтожаются и все члены, содержащие C_2, так как $y = y_2(x)$ есть также решение линейного однородного дифференциаль ного уравнения

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

и поэтому выражение, заключенное во вторых квадратных скобках, также равно нулю, так как

$$y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = 0.$$

Тогда получим еще одно условие:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{2.96}$$

Условия (2.93) и (2.96) образуют систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.97}$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы, получаем

$$C_1'' y_1 + C_2'' y_2 + C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0.$$

Тогда уравнения (2.91), (2.94) и (2.95) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2', \\ y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + f(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.98}$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.97) относительно C_1' и C_2', находим

$$C_1' = -\frac{f(x)}{y_1\left(\ln \frac{y_2}{y_1}\right)'}, \quad C_2' = \frac{f(x)}{y_2\left(\ln \frac{y_2}{y_1}\right)'}. \tag{2.99}$$

Интегрируя, получаем искомые функции

$$C_1 = -\int \frac{f(x)\,dx}{y_1\left(\ln \frac{y_2}{y_1}\right)'} = C_1(x), \quad C_2 = \int \frac{f(x)\,dx}{y_2\left(\ln \frac{y_2}{y_1}\right)'} = C_2(x).$$

Подставляем найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в равенство (2.91). В результате получаем искомое общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.89).

Пример. Проинтегрировать методом вариации постоянных линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$x^2 y'' - 3xy' - 4y = x \sin x + 4 \cos x.$$

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

имеет действительные корни $r_1 = -1$, $r_2 = 4$. Следовательно, общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^4.$$

Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = \frac{C_1(x)}{x} + C_2(x)\,x^4.$$

Продифференцируем это равенство. Тогда

$$y' = \frac{C_1'}{x} + C_2' x^4 - \frac{C_1}{x^2} + 4C_2 x^3.$$

Наложим дополнительное условие:

$$\frac{C_1'}{x} + C_2' x^4 = 0. \qquad (1)$$

Дифференцируя повторно, получим

$$y'' = \left(\frac{C_1'}{x} + C_2' x^4\right)' - \frac{C_1'}{x^2} + 4Cx^3 + \frac{2C_1}{x^3} + 12C_2 x^2.$$

Подставляя значения y, y' и y'' в заданное дифференциальное уравнение, имеем

$$-C_1' + 4C_2' x^5 + \frac{2C_1}{x} + 12C_2 x^4 + \frac{2C_1}{x} - 8C_2 x^4 - \frac{4C_1}{x} - 4C_2 x^4 = x\sin x + 4\cos x,$$

откуда после приведения подобных членов получим

$$-C_1' + 4C_2' x^5 = x\sin x + 4\cos x. \qquad (2)$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$C_1' + C_2' x^5 = 0. \qquad (3)$$

Сложим уравнения (2) и (3):

$$5C_2' x^5 = x\sin x + 4\cos x,$$

или

$$5C_2'(x) = \frac{\sin x}{x^4} + 4\frac{\cos x}{x^5},$$

откуда после интегрирования находим

$$5C_2(x) = \int \frac{\sin x}{x^4}\,dx + 4\int \frac{\cos x}{x^5}\,dx. \qquad (4)$$

Находя второй из интегралов, входящих в последнее уравнение, интегрированием по частям (полагая $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$, т. е. $\frac{dx}{x^5} = dv$, $v = -\frac{1}{4x^4}$), получаем

$$5C_2(x) = \int \frac{\sin x}{x^4}\,dx - \frac{4}{4x^4}\cos x - \int \frac{\sin x}{x^4}\,dx,$$

откуда

$$5C_2(x) = -\frac{\cos x}{x^4} + \tilde{C}^*,$$

или

$$C_2(x) = -\frac{\cos x}{5x^4} + C^{**}, \tag{5}$$

где $C^{**} = \frac{1}{5}\tilde{C}^*$.

Умножим уравнение (3) на четыре и вычтем из полученного результата уравнение (2), тогда имеем

$$5C_1'(x) = -x\sin x - 4\cos x,$$

откуда после интегрирования находим

$$5C_1(x) = -\int x\sin x\,dx - 4\int \cos x\,dx.$$

Проинтегрируем по частям первый из интегралов:

$$5C_1(x) = x\cos x - \sin x - 4\sin x + \tilde{\tilde{C}}^* = x\cos x - 5\sin x + \tilde{\tilde{C}}^*.$$

Тогда

$$C_1(x) = \frac{x\cos x}{5} - \sin x + C^*,$$

где $C^* = \frac{1}{5}\tilde{\tilde{C}}^*$.

Общее решение данного линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{x\cos x}{5} - \sin x + C^*\right) + x^4\left(C^{**} - \frac{\cos x}{5x^4}\right) =$$

$$= \frac{\cos x}{5} - \frac{\sin x}{x} + \frac{C^*}{x} + C^{**}x^4 - \frac{\cos x}{5} = \frac{C^*}{x} + C^{**}x^4 - \frac{\sin x}{x}.$$

Полагая $C^* = C^{**} = 0$, получаем частное решение данного дифференциального уравнения

$$y_1 = -\frac{\sin x}{x}.$$

§ 11. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Линейные однородные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами интегрируют с помощью степенных рядов в случае, если найти общее решение таких дифференциальных уравнений рассмотренными выше способами трудно или вообще невозможно.

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.100}$$

и заданы начальные условия

$$y = y_0,\ y' = y_0' \quad \text{при } x = x_0. \tag{2.101}$$

Если переменные коэффициенты линейного дифференциального уравнения $p(x)$ и $q(x)$ можно разложить в степенные ряды по степеням $x-x_0$:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i (x-x_0)^i, \quad q(x)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i (x-x_0)^i, \tag{2.102}$$

сходящиеся в области $|x-x_0|<r$ (r — положительная постоянная), то это дифференциальное уравнение имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям, которое раскладывается в ряд по степеням $x-x_0$:

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\sum_{i=2}^{\infty} c_i (x-x_0)^i, \tag{2.103}$$

сходящийся также в области $|x-x_0|<r$. Числа y_0 и y_0' могут быть произвольными.

Коэффициенты c_i степенного ряда (2.103) можно определить методом неопределенных коэффициентов, т. е. подставляя этот ряд в заданное линейное дифференциальное уравнение (2.100) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $x-x_0$ в левой части полученного равенства. Если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ являются многочленами, то ряд (2.103) сходится при всех значениях x.

Для нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения необходимо найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2. Для этого строят фундаментальную систему решений y_1, y_2, нормированную в точке $x=x_0$, т. е. полагают, что при $x=x_0$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1, \ y_1'=0; \\ y_2&=0, \ y_2'=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.104}$$

В частном случае, если решение линейного дифференциального уравнения, полученное в виде ряда (2.103), можно просуммировать, то второе частное решение находится по формуле

$$y_2=y_1\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

Рассмотренный метод обобщается на линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+p_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0, \tag{2.105}$$

общее решение которых удовлетворяет начальным условиям

$$y=y_0, \ y'=y_0', \ y''=y_0'', \ \ldots, \ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0 \tag{2.106}$$

и имеет вид

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{i=n}^{\infty} c_i (x-x_0)^i, \tag{2.107}$$

т. е. представляет собой ряд Тейлора.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка, переменные коэффициенты и правая часть которого разлагаются в степенные ряды относительно $x-x_0$, также можно найти в виде степенного ряда относительно $x-x_0$.

Пример 1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+xy=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Решение. Ищем решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда

$$y=a_0+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\ldots.$$

Подставляя значения $x=0$, $y=1$, находим $a_0=1$. Таким образом, решение имеет вид

$$y=1+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\ldots. \qquad (*)$$

Дифференцируя дважды этот ряд, получим

$$y'=a_1\cdot 2x+a_2\cdot 3x^2+a_3\cdot 4x^3+\ldots,$$
$$y''=a_1\cdot 2\cdot 1+a_2\cdot 3\cdot 2x+a_3\cdot 4\cdot 3x^2+\ldots+a_n(n+1)nx^{n-1}+\ldots.$$

В результате подстановки значений производных в заданное дифференциальное уравнение имеем

$$a_1\cdot 2\cdot 1+(a_2\cdot 3\cdot 2+1)x+a_3\cdot 4\cdot 3x^2+(a_4\cdot 5\cdot 4+a_1)x^3+$$
$$+\ldots+[a_n(n+1)n+a_{n-3}]x^{n-1}+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты, получим

$$\begin{aligned}
a_1\cdot 2\cdot 1&=0,\\
a_2\cdot 3\cdot 2+1&=0,\\
a_3\cdot 4\cdot 3&=0,\\
a_4\cdot 5\cdot 4+a_1&=0.\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_n(n+1)n+a_{n-3}&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$a_1=0,\ a_2=\frac{1}{3\cdot 2},\ a_3=0,\ a_4=0,\ \ldots,\ a_n=-\frac{a_{n-3}}{(n+1)n},\ldots.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (*), получим

$$y=1-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}-\ldots\pm\frac{x^{3n}}{3n(3n-1)\ldots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\ldots.$$

Применяя признак сходимости Даламбера, можно убедиться, что этот ряд сходится при любом значении x.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$xy'' = (2+x)\,y,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y=0$, $y'=1$ при $x=0$.

Решение. Ищем решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots.$$

Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)\,a_nx^{n-2} + \ldots.$$

Принимая во внимание начальные условия, находим

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Подставляя значения y и y'' в данное дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему алгебраических линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$1\cdot 2a_2 = 2a_1 + a_0,\ \text{т. е. } a_2 = 1;$$

$$2\cdot 3a_3 = 2a_2 + a_1,\ \text{т. е. } a_3 = \frac{1}{1\cdot 2};$$

$$3\cdot 4a_4 = 2a_3 + a_2,\ \text{т. е. } a_4 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};$$

. . . . . .

$$n(n+1)\,a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1},\ \text{т. е } a_{n+1} = \frac{2a_n + a_{n-1}}{(-1)}.$$

Отсюда

$$a_5 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ a_6 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\ a_7 = \frac{1}{6!},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Подставим найденные коэффициенты в общее выражение искомого решения, тогда

$$y = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \ldots.$$

Вынося x за скобку, получаем

$$y = x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right) = xe^x.$$

Упражнения

Проинтегрировать с помощью степенных рядов по степеням x дифференциальные уравнения, фундаментальные системы решений которых нормированы в точке $x_0 = 0$:

1. $y'' + \frac{1}{1-x}y = 0.$

Отв. $y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} - \ldots,$

$y_2 = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{2x^4}{4!} - \frac{7}{5!}x^5 + \ldots;\ y = C_1y_1 + C_2y_2.$

2. $y'' + xy' - (2x^2 + 1) = 0$.

Отв. $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \ldots$, $y_2 = x + \frac{12}{5!} x^5 + \ldots$; $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

3. Проинтегрировать с помощью рядов дифференциальное уравнение

$$y'' = xy' + y + e^x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Отв. $y = 1 + x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{7x^4}{24} + \frac{x^5}{24} + \ldots$

§ 12. МЕТОД АДАМСА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть требуется решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.108}$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{2.109}$$

Решим эту задачу с помощью метода Адамса.

Введем следующие обозначения:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad y_i' = y'(x_i), \quad y_i'' = y''(x_i) = f(x_i, y_i, y_i'),$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$. Допустим, что каким-то методом составлена начальная таблица, т. е. вычислены три ее начальные строки $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_i$; $y_0', y_1', y_2', \ldots, y_i'$; $y_0'', y_1'', y_2'', \ldots, y_i''$, причем $i \geqslant 3$.

Используя эти данные, можно вычислить первые, вторые и третьи разности $\Delta y_{i-1}''$, $\Delta^2 y_{i-2}''$, $\Delta^3 y_{i-3}''$. На основании формулы Ньютона для интерполяции назад с точностью до четвертых разностей имеем

$$y'' = y_i'' + q\Delta y_{i-1}'' + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2}'' + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3}'', \tag{2.110}$$

где

$$q = \frac{x - x_i}{h}. \tag{2.111}$$

Из соотношения (2.111) следует, что

$$x = hq + x_i,$$

откуда

$$dx = h\,dq. \tag{2.111'}$$

Принимая во внимание зависимость (1.113), имеем

$$y' = y_i' + \Delta y_i' = y_i' + \int_{x_i}^{x} y''\,dx = y_i' + h\int_0^q y''\,dq, \tag{2.112}$$

так как при $x=x_i$ нижний предел $q=\frac{x-x_i}{h}=0$, а при $x=x$ верхний предел $\frac{x-x_i}{h}=q$.

Аналогично находим

$$y=y_i+\Delta y_i=y_i+\int_{x_i}^{x} y'\,dx=y_i+h\int_0^q y'\,dq. \tag{2.113}$$

Последовательно интегрируя дважды по q соотношение (2.110) на отрезке $[0, q]$ и учитывая равенства (2.112) и (2.113), получим

$$y'-y_i'=h\left[qy_i''+\frac{q^2}{2}\Delta y_{i-1}''+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{6}\right)\Delta^2 y_{i-2}''+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{q^2}{6}+\frac{q^3}{6}+\frac{q^4}{24}\right)\Delta^3 y_{i-3}''\right]; \tag{2.112'}$$

$$y-y_i=hqy_i'+h^2\left[\frac{q^2}{2}y_i''+\frac{q^3}{6}\Delta y_{i-1}''+\left(\frac{q^3}{12}+\frac{q^4}{24}\right)\Delta^2 y_{i-2}''+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{q^3}{18}+\frac{q^4}{24}+\frac{q^5}{120}\right)\Delta^3 y_{i-3}''\right]. \tag{2.113'}$$

Полагая в соотношениях (2.112') и (2.113') $q=1$, находим первое приближение:

$$\Delta y_i'^{(1)}=h\left(y_i''+\frac{1}{2}\Delta y_{i-1}''+\frac{5}{12}\Delta^2 y_{i-2}''+\frac{3}{8}\Delta^3 y_{i-3}''\right); \tag{2.114}$$

$$\Delta y_i^{(1)}=hy_i'+h^2\left(\frac{1}{2}y_i''+\frac{1}{6}\Delta y_{i-1}''+\frac{1}{8}\Delta^2 y_{i-2}''+\frac{19}{180}\Delta^3 y_{i-3}''\right). \tag{2.115}$$

Равенство (2.115) можно упростить, если считать $\frac{19}{180}\approx\frac{1}{10}$. Тогда

$$\Delta y_i^{(1)}=hy_i'+h^2\left(\frac{1}{2}y_i''+\frac{1}{6}\Delta y_{i-1}''+\frac{1}{8}\Delta^2 y_{i-2}''+\frac{1}{10}\Delta^3 y_{i-3}''\right). \tag{2.115'}$$

Можно принять

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1}'&=y_i'+\Delta y_i'^{(1)},\\ y_{i+1}&=y_i+\Delta y_i^{(1)}.\end{aligned}\right\} \tag{2.116}$$

Для уточнения вычислений, после нахождения y_{i+1}', по формулам (2.114) и (2.116) находят конечные разности $\Delta y_i'$, $\Delta^2 y_{i-1}'$, $\Delta^3 y_{i-2}'$, а затем вычисляют второе приближение величины Δy_i по следующей, более точной, формуле:

$$\Delta y_i^{(2)}=hy_i'+\frac{1}{2}\Delta(hy_i')-\frac{1}{12}\Delta^2(hy_{i-1}')-\frac{1}{24}\Delta^3(hy_{i-2}')=$$
$$=h\left(y_i'+\frac{1}{2}\Delta y_i'-\frac{1}{12}\Delta^2 y_{i-1}'-\frac{1}{24}\Delta^3 y_{i-2}'\right).$$

Тогда, полагая

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i^{(2)},\quad y_{i+1}'=y_i'+\Delta y_i'^{(1)}, \tag{2.117}$$

из данного дифференциального уравнения находим

$$y''_{i+1} = f(x_{i+1},\ y_{i+1},\ y'_{i+1})$$

и, дополнив таблицу, находим величину y'_{i+1} из соотношения

$$y'_{i+1} = y'_i + \Delta y'^{(2)}_i,$$

где

$$\Delta y'^{(2)}_i = h\left(y''_i + \frac{1}{2}\Delta y''_i - \frac{1}{12}\Delta^2 y''_{i-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 y''_{i-2}\right). \qquad (2.118)$$

При необходимости производится пересчет величин y_{i+1} и y'_{i+1} до тех пор, пока не прекратятся изменения. Шаг h выбирается таким малым, чтобы зависимости (2.116) и (2.117) дали одинаковые результаты в пределах заданной точности вычислений. Начальный отрезок y_0, y_1, y_2, y_3; y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 предварительно определяется каким-нибудь методом. Техника вычислений аналогична рассмотренной в примере 2, § 12, гл. I. Числовой пример на решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка приводится в гл. V, § 1 (см. пример 3).

ГЛАВА III

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Системой дифференциальных уравнений называется система, связывающая независимую переменную, неизвестные функции этой переменной и производные функций по независимой переменной.

Наибольший интерес представляют системы, имеющие *нормальную форму*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

где $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — искомые неизвестные функции независимой переменной x; $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ — известные функции $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области; n — порядок системы. Иными словами, система, разрешенная относительно всех входящих в нее производных, называется *нормальной*.

Решением системы (3.1) в интервале $(a,\ b)$ называется совокупность n функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x), \qquad (3.2)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в этом интервале, обращающая каждое уравнение системы в тождество.

Кривая соответствующая решению (3.2), называется *интегральной кривой*.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (3.1 состоит в нахождении решения

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \qquad (3.3)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0, \qquad (3.4)$$

где $x_0,\ y_1^0,\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}$ — заданные числа (или начальные данные).

С геометрической точки зрения задача Коши для системы дифференциальных уравнений (3.1) с начальными условиями (3.4) означает нахождение среди всех интегральных кривых системы такой, которая удовлетворяет начальным значениям $(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для системы (3.1) (теорема Пикара) в упрощенной формулировке приводятся ниже.

Пусть дана нормальная система (3.1) и заданы начальные условия (3.4). Предположим, что функции в правых частях системы

(3.1) определены в некоторой замкнутой ограниченной области D:

$$|x-x_0|\leqslant a,\ |y_k-y_k^{(0)}|\leqslant b \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

с начальными значениями $(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)})$ внутри области (здесь a и b — заданные положительные числа) и удовлетворяют в этой области следующим условиям:

1) функции $f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ непрерывны по всем своим аргументам и, следовательно, ограничены, т. е.

$$|f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)|\leqslant M \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.5}$$

где M — постоянное положительное число;

2) функции $f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ имеют ограниченные частные производные по аргументам $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, т. е.

$$\left|\frac{\partial f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)}{\partial y_l}\right|\leqslant K \quad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.6}$$

где K — постоянное положительное число.

При этих предпосылках система дифференциальных уравнений (3.1) имеет единственное решение

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n=y_n^{(0)} \quad \text{при } x=x_0.$$

Теорема Пикара устанавливает достаточные условия прохождения через заданную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ одной и только одной гладкой интегральной кривой системы (3.1).

Общим решением системы дифференциальных уравнений (3.1) в области D изменения переменных $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ называется совокупность n функций

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\varphi_1(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),\\ y_2&=\varphi_2(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n).\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=\varphi_n(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

имеющих частные производные по x, которая обладает следующими свойствами:

1) система уравнений (3.7) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, т. е. все эти постоянные не могут быть исключены из системы.

Разрешая систему (3.7) относительно произвольных постоянных, имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\psi_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ C_2&=\psi_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_n&=\psi_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n);\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

2) функции системы должны удовлетворять системе (3.1), т. е. являться решением этой системы при всех значениях произвольных постоянных (3.8), когда переменные $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ принадлежат области D.

Задача Коши для системы (3.1) с начальными данными x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ решается следующим образом:

1) в систему функций (3.7) вместо значений $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ подставляют начальные данные, тогда

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(0)} &= \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2^{(0)} &= \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(0)} &= \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n); \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

2) решая систему (3.9) относительно произвольных постоянных, находят $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, ..., $C_n = C_n^{(0)}$;

3) найденные значения произвольных постоянных подставляются в систему (3.7), и получают единственное искомое решение

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Общее решение, в котором вместо произвольных постоянных подставлены начальные значения $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при $x = x_0$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

называется *общим решением в форме Коши.*

Частным решением называется решение (3.2), в каждой точке которого существует единственное решение задачи Коши. Оно получается из общего решения в области D при определенных числовых значениях произвольных постоянных.

Непрерывно дифференцируемые функции

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

называются *интегралами системы.*

Если $\psi_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\psi_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\ldots$, $\psi_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — интегралы системы (3.1), то и произвольная функция $F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ от этих интегралов будет также интегралом системы, так как

$$F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = F(C_1, C_2, \ldots C_n) = C. \tag{3.13}$$

Таким образом, система имеет бесчисленное множество интегралов. Среди них независимых интегралов системы (3.1) будет только n, где n — число дифференциальных уравнений первого порядка, составляющих систему.

Независимыми интегралами называются такие интегралы ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n, между которыми не может существовать никакого тождественного соотношения вида

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0, \tag{3.14}$$

т. е. ни один из них не является функцией остальных.

Равенства вида

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_n \end{aligned}$$

называются *первыми интегралами* системы (3.1).

Общим интегралом системы (3.1) называется совокупность n независимых первых интегралов этой системы.

При интегрировании системы дифференциальных уравнений можно найти общее решение или общий интеграл системы.

Если при интегрировании системы (3.1) получается семейство интегральных кривых, определенное в виде, не разрешенном относительно произвольных постоянных или искомых функций, то такое семейство также называется общим интегралом системы.

Рассмотрим механический смысл нормальной системы дифференциальных уравнений.

Представим нормальную систему (3.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

где t — время; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — прямоугольные координаты точки *фазового пространства*; при $n = 2$ это пространство есть плоскость (x_1, x_2) при $n = 3$ — система координат (x_1, x_2, x_3). Любое решение системы (3.15)

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t) \tag{3.16}$$

называется *движением*, определяемым системой, а путь, который описывает точка в фазовом пространстве, называется *траекторией* движения.

Система (3.15) задает *поле скоростей движений*, определяемых системой. Задача интегрирования этой системы состоит в восстановлении по этому полю движений системы.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (3.15) формулируется: найти решение (траекторию движения) (3.16), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n = x_n^{(0)} \quad \text{при } t = t_0, \tag{3.17}$$

где t_0, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ — заданные числа (начальные данные). Иными словами, необходимо найти такую траекторию движения (3.16), при которой движущаяся точка находится в заданной точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, фазового пространства в заданный момент времени t_0.

Если все уравнения в правой части системы (3.15) при начальных значениях $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ обращаются в нуль для всех значений времени t, то система определяет движение вида

$$x_1 \equiv x_1^{(0)},\ x_2 \equiv x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n \equiv x_n^{(0)}, \tag{3.18}$$

которое называется *состоянием покоя*.

Траектория этого движения является точкой $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, называемой *точкой покоя* или *равновесия* системы.

§ 2. СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{3.19}$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме*.

Если в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ хотя бы один из знаменателей $F_1, F_2, \ldots, F_n$ не равен нулю, то в окрестности этой точки система (3.19) заменяется нормальной системой $n-1$ дифференциальных уравнений. Действительно, если, например, $F_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то система (3.19) эквивалентна нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{F_1}{F_n}, \\ \frac{dx_2}{dx_n} &= \frac{F_2}{F_n}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{F_{n-1}}{F_n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Интегралом (первым интегралом) системы (3.19) называется каждый интеграл (первый интеграл) системы (3.20). Система диф-

ференциальных уравнений (3.19) имеет не более $n-1$ независимых интегралов (первых интегралов).

Общим интегралом системы (3.19) называется совокупность $n-1$ независимых первых интегралов системы.

Нормальную систему дифференциальных уравнений можно записать также в симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}. \tag{3.21}$$

§ 3. КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Канонической системой называется система дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенная относительно старших производных

$$\left.\begin{aligned}
y_1^{(k_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}),\\
y_2^{(k_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n^{(k_n)} &= f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}).
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Порядком системы называется число $k_1+k_2+\ldots+k_n$. *Решением системы* (3.22) в интервале (a, b) называется совокупность n функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x), \tag{3.23}$$

обладающих непрерывными производными соответствующих порядков, при условии, что эти функции обращают все уравнения системы дифференциальных уравнений (3.22) в тождества при $a \leqslant x \leqslant b$. Каноническая система (3.22), как и одно дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

n-го порядка приводится к соответствующей ей нормальной системе дифференциальных уравнений, если производные в правой части равенства принять за новые неизвестные функции.

Задача Коши для канонической системы дифференциальных уравнений (3.22) формулируется: найти решение (3.23), в котором искомые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вместе с производными до порядков $k_1-1, k_2-1, \ldots, k_n-1$ соответственно принимают наперед заданные числовые значения при фиксированном значении $x = x_0$.

Общее решение канонической системы дифференциальных уравнений имеет $k_1+k_2+\ldots+k_n$ произвольных постоянных.

§ 4. ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА К СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Выяснение связи, существующей между дифференциальным уравнением высшего порядка и системой дифференциальных уравнений, а также между системой дифференциальных уравнений и дифференциальным уравнением высшего порядка имеет большое практическое значение для интегрирования систем.

1. Связь между дифференциальным уравнением высшего порядка и системой дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{3.24}$$

Полагаем

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ y'' = y_3,\ y''' = y_4,\ \ldots,\ y^{(n-2)} = y_{n-1},\ y^{n-1} = y_n. \tag{3.25}$$

Дифференцируя первую из подстановок (3.25) по x, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx},$$

или

$$y' = \frac{dy_1}{dx}.$$

Согласно второй принятой подстановке это выражение можно представить в виде

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2. \tag{3.26}$$

Аналогично, дифференцируя вторую из подстановок (3.25) по x, имеем

$$y'' = \frac{dy_2}{dx}.$$

Согласно третьей принятой подстановке последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3. \tag{3.27}$$

Дифференцируя третью из подстановок (3.25) по x, имеем

$$y''' = \frac{dy_3}{dx}.$$

Согласно четвертой принятой подстановке это выражение принимает вид

$$\frac{dy_3}{dx} = y_4.$$

Продолжая процесс далее и дифференцируя предпоследнюю из подстановок (3.25) по x, имеем

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \frac{dy_{n-1}}{dx}. \tag{3.27'}$$

Так как

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \frac{d}{dx} y^{(n-2)} = y^{(n-2+1)} = y^{(n-1)},$$

то

$$y^{(n-1)} = \frac{dy_{n-1}}{dx}.$$

Согласно последней принятой подстановке это выражение имеет вид

$$\frac{dy_{n-1}}{dy} = y_n. \tag{3.28}$$

Дифференцируя последнюю из подстановок (3.25) по x, имеем

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{dy_n}{dx}.$$

Так как

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = y^{(n-1+1)} = y^n,$$

то

$$y^{(n)} = \frac{dy_n}{dx}.$$

Сравнивая полученное равенство с дифференциальным уравнением (3.24), имеем

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Учитывая принятые подстановки (3.25), получаем

$$\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n). \tag{3.29}$$

Итак, принимая во внимание соотношения (3.26)—(3.29), дифференциальное уравнение n-го порядка (3.24) можно заменить нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\
\frac{dy_3}{dx} &= y_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\
\frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n).
\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Члены, расположенные по диагонали в правой части нормальной системы (3.30), представляют собой производные искомой функции соответственно от первого до n-го порядка. Принятая расстановка членов в правой части системы (3.30) более наглядно показывает это.

Покажем, что любое линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+a_1y'+a_0y=f(x) \qquad (3.31)$$

эквивалентно системе n линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть

$$\begin{aligned}
y &= y_1\\
y' &= y_2\\
y'' &= y_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(r)} &= y_{r+1},\quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.
\end{aligned}$$

Здесь $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — функции действительного переменного x. Тогда на основании линейного дифференциального уравнения (3.31) получаем следующую систему n линейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
y_1'=\frac{dy_1}{dx} &= y_2\\
y_2'=\frac{dy_2}{dx} &= y_3\\
&\vdots\\
y_{n-1}'=\frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n\\
y_n'=\frac{dy_n}{dx} &= -a_0y_1-a_1y_2-\ldots-a_{n-1}y_n+f(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Пример 1. Привести дифференциальное уравнение

$$y^{IV}+x^2y=0$$

к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение. Полагаем

$$\begin{aligned}
y_1&=y,\\
y_2&=y'=y_1',\\
y_3&=y''=y_2',\\
y_4&=y'''=y_3'.
\end{aligned}$$

Тогда система примет вид

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= y_2,\\
y_2' &= y_3,\\
y_3' &= y_4,\\
y_4' &= -x^2y_1.
\end{aligned}\right\}$$

Пример 2. Привести дифференциальное уравнение

$$y^{IV} + y'e^x - xy = \cos ax$$

к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Решение. Пусть $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $y_4 = y'''$. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ y_2' &= \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ y_3' &= \frac{dy_3}{dx} = y_4, \\ y_4' &= \frac{dy_4}{dx} = xy_1 - e^x y_2 \end{aligned}\right\} + \cos ax.$$

Первые три уравнения системы получаются из принятых подстановок; последнее уравнение — из данного дифференциального уравнения.

II. Приведение системы n дифференциальных уравнений n-го порядка к нормальной системе 2n дифференциальных уравнений первого порядка. Систему n дифференциальных уравнений n-го порядка можно привести к нормальной системе $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим практически важный случай приведения системы двух дифференциальных уравнений второго порядка к нормальной системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть дана система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} y'' &= f_1(x, y, y', z, z'), \\ z'' &= f_2(x, y, y', z, z'), \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

где y и z — искомые функции x. Введем четыре искомые функции:

$$y = y_1, \; y' = y_2, \; z = y_3, \; z' = y_4. \tag{3.34}$$

Дифференцируя первую из подстановок по x, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} \quad \text{или} \quad y' = \frac{dy_1}{dx}.$$

Согласно второй принятой подстановке это выражение принимает вид

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2. \tag{3.35}$$

Дифференцируя вторую из подстановок (3.34) по x, получаем

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \quad \text{или} \quad y'' = \frac{dy_2}{dx}.$$

Сравнивая левую часть этого равенства с первым уравнением системы дифференциальных уравнений (3.33), имеем

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x,\ y,\ y',\ z,\ z'),$$

или, учитывая принятые подстановки,

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4). \tag{3.36}$$

Дифференцируя третью из подстановок (3.34) по x, имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy_3}{dx} \quad \text{или} \quad z' = \frac{dy_3}{dx}.$$

Согласно четвертой принятой подстановке (3.34) это выражение принимает вид

$$\frac{dy_3}{dx} = y_4. \tag{3.37}$$

Дифференцируя четвертую из подстановок (3.34) по x, получим

$$\frac{dz'}{dx} = \frac{dy_4}{dx} \quad \text{или} \quad z'' = \frac{dy_4}{dx}.$$

Сравнивая левую часть этого равенства со вторым уравнением системы дифференциальных уравнений (3.33), имеем

$$\frac{dy_4}{dx} = f_2(x,\ y,\ y',\ z,\ z')$$

или, учитывая принятые подстановки

$$\frac{dy_4}{dx} = f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4). \tag{3.38}$$

Итак, принимая во внимание соотношения (3.35)—(3.38), можно привести систему (3.33) к нормальной системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4), \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4). \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Члены в правых частях двух первых уравнений нормальной системы (3.39) являются производными соответственно первого и второго порядков искомой функции y, а члены правых частей двух

последних уравнений — производными соответственно первого и второго порядка искомой функции z.

Рассмотренная задача может быть распространена на системы, содержащие большее число уравнений, или более высокого порядка.

III. Связь между нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциальным уравнением высшего порядка. Рассмотрим задачу приведения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Пусть дана система n дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= \varphi(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \psi(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

Продифференцировав, например, первое из уравнений системы $n-1$ раз по независимой переменной x и заменяя при этом производные от искомых функций $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ по x их значениями, выраженными через $\varphi, \ldots, \psi$, согласно соотношениям (3.40), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= f_2(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= f_n(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Исключив из этой системы $n-1$ неизвестных $y_2, y_3, \ldots, y_n$, приходим к одному дифференциальному уравнению n-го порядка вида

$$F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^3y_1}{dx_3}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right) = 0. \tag{3.42}$$

Проинтегрировав, если это возможно, дифференциальное уравнение (3.42), находим

$$y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^3y_1}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx^n}.$$

Величины $y_2, y_3, \ldots, y_n$ следует выразить через $x, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^3y_1}{dx^3}, \ldots$ $\ldots, \frac{d^ny_1}{dx^n}$, используя систему дифференциальных уравнений (3.41).

IV. *Приведение системы n линейных дифференциальных уравнений к линейному дифференциальному уравнению n-го порядка.* Полагая в системе n линейных дифференциальных уравнений n-го порядка (3.32) $y_1 = y$ и подставляя первые $n-1$ уравнений в n-е уравнение этой системы, получим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами (3.31).

Итак, система (3.32) эквивалентна линейному дифференциальному уравнению n-го порядка (3.31).

Пример 3. Систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y + 4z + e^{ax}, \\ \frac{dz}{dx} &= 2z + 4y + e^{ax}, \end{aligned}\right\}$$

привести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Решение. Из первого уравнения системы находим z:

$$z = \frac{1}{4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}e^{ax}.$$

Дифференцируя полученное равенство, имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{a}{4}e^{ax}.$$

Полученные выражения z и $\frac{dz}{dx}$ подставляем во второе уравнение данной системы:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{a}{4}e^{ax} = 2\left(\frac{1}{4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}e^{ax}\right) + 4y + e^{ax},$$

откуда, после приведения подобных членов, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 12y = (a+2)e^{ax}.$$

Упражнения

Найти системы дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентные следующим линейным дифференциальным уравнениям:

1. $y''' + y'' + y' + y = 0$.

Отв.
$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= -y_1 - y_2 - y_3. \end{aligned}\right\}$$

2. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Отв.
$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= -y_1 - 3y_2 - 3y_3. \end{aligned}\right\}$$

3. $y''' - 3y'' + y' - y = e^{2x}$.

Отв.
$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3 + e^{2x}. \end{aligned}\right\}$$

§ 5. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Последовательное интегрирование

Интегрирование системы n дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих только одну неизвестную функцию вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

сводится к интегрированию каждого дифференциального уравнения в отдельности. Интегрирование системы дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\ y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x,\ y_1,\ y_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

выполняется последовательно, т. е. интегрируется первое дифференциальное уравнение, найденное общее решение подставляется во второе дифференциальное уравнение, затем интегрируется второе дифференциальное уравнение и найденное общее решение подставляется в третье дифференциальное уравнение и т. д.

Пример 1. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Поскольку уравнения данной системы являются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то решение системы будем искать в виде

$$x = C_1 e^{\lambda t},\quad y = C_2 e^{\lambda t}.$$

Подставляя эти выражения в данную систему дифференциальных уравнений, после сокращения на $e^{\lambda t}$, имеем

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)\,C_1 - C_2 &= 0, \\ -2C_1 - \lambda C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

Ненулевое решение системы алгебраических уравнений (*) существует только тогда, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Раскрывая определитель, получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \qquad (***)$$

корни которого $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$. При $\lambda_1 = 2$ из второго равенства системы (*) находим $C_2 = -C_1$; при $\lambda_2 = -1$ получаем $C_2 = 2C_1$. Таким образом, получаем два решения:

$$x_1 = C_{11}e^{2t}, \quad y_1 = -C_{11}e^{2t} \text{ и } x_2 = C_{12}e^{-t}, \quad y_2 = 2C_{12}e^{-t}.$$

Их сумма также является решением данной системы. Окончательно имеем

$$x = C_{11}e^{2t} + C_{12}e^{-t}, \quad y = -C_{11}e^{2t} + 2C_{12}e^{-t}.$$

В прикладных задачах особое значение имеют системы дифференциальных уравнений, к которым, в частности, сводится всякая задача, связанная с движением системы материальных точек и твердых тел в пространстве.

Задача 1. Тело брошено под углом α к горизонту и движется в среде, сопротивление которой пропорционально скорости v тела. Найти траекторию движения тела.

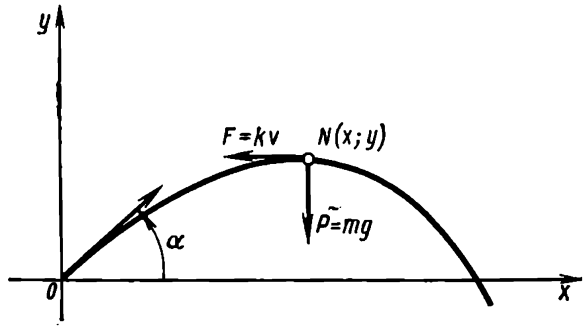


Рис. 29

Решение. В любой точке $N(x; y)$ траектории на тело действуют две силы: тяжести $P = mg$ и сопротивления среды $F = kv$. Составляющие их равнодействующей по осям координат (рис. 29) представляются:

$$\left.\begin{aligned} X &= P\cos(P, X) + F\cos(F, X), \\ Y &= P\cos(P, Y) + F\cos(F, Y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\cos(P, X) = 0, \quad \cos(P, Y) = 1, \quad \cos(F, X) = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos(F, Y) = -\frac{dy}{ds},$$

систему (1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} X &= -kv\frac{dx}{ds}, \\ Y &= -mg - kv\frac{dy}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Как известно, $v = \frac{ds}{dt}$, поэтому система (2) имеет следующий окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= -k\frac{dx}{dt}, \\ Y &= -k\frac{dy}{dt} - mg. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Используя второй закон динамики, составим дифференциальные уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt} - mg, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} - g &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Пусть $\frac{dx}{dt} = y_1$, тогда $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt}$ и приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} + \frac{k}{m}y_1 &= 0, \\ \frac{dy_2}{dt} + \frac{k}{m}y_2 - g &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая в каждом уравнении содержит только одну неизвестную функцию и поэтому ее интегрирование сводится к интегрированию двух отдельных дифференциальных уравнений.

Интегрируя первое из дифференциальных уравнений (4′) как неполное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, а второе как полное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, получим общие решения:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y &= C_3 + C_4e^{-\frac{k}{m}t} - g\frac{m}{k}t. \end{aligned}\right\}$$

Для нахождения частного решения используем начальные условия: при $t=0$ имеем $x=0$, $y=0$, $\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha$. Получаем

$$\left.\begin{aligned} 0&=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}\cdot 0},\\ 0&=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}-\frac{gm}{k}\cdot 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Так как

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k}{m}C_4e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k},$$

то

$$\left.\begin{aligned} v_0\cos\alpha&=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}\cdot 0},\\ v_0\sin\alpha&=-\frac{k}{m}C_4-\frac{gm}{k}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из уравнений (5) и (6) определяем произвольные постоянные:

$$C_1=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,\quad C_2=-\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,$$

$$C_3=\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha),\quad C_4=-\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha).$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 и C_4 в общее решение, получаем частные решения:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=a\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right),\\ y&=\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha)\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right)-\frac{gm}{k}t=b\left(1-e^{-\frac{g}{c}t}\right)-ct.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь $a=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha$, $b=\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha)$, $c=\frac{gm}{k}$, откуда

$$-\frac{k}{m}=-\frac{g}{c}.$$

Для определения траектории движения тела исключим время t. Из первого уравнения (7), имеем

$$1-e^{-\frac{g}{c}t}=\frac{x}{a}.$$

Подставляя полученное выражение во второе из уравнений (7), получим

$$y=b\frac{x}{a}-ct,$$

откуда

$$t=\frac{bx-ay}{ac}.$$

Значение t вновь подставляем в первое из уравнений (7). В результате получаем

$$x = a\left[1 - e^{-\frac{g}{ac^2}(bx - ay)}\right].$$

Следовательно, траектория движения камня имеет вид кривой

$$ay - bx = \frac{ac^2}{g} \ln \frac{a - x}{a}.$$

II. Метод исключения

Нормальные системы дифференциальных уравнений можно проинтегрировать, предварительно приведя данную систему n-го порядка к одному дифференциальному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким таким уравнениям, причем сумма их порядков равна n.

Такое приведение достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной. Поэтому такой прием интегрирования системы называется *методом исключения*. Полученное дифференциальное уравнение надо проинтегрировать и найти общее решение системы, не применяя интегрирование.

Метод исключения используется также при решении канонической системы дифференциальных уравнений, которая может быть приведена к одному дифференциальному уравнению $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$-го порядка.

Пример 2. Проинтегрировать методом исключения систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= z - 1, \\ \frac{dz}{dt} &= y - 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Из первого уравнения данной системы имеем

$$z = \frac{dy}{dt} + 1. \tag{1}$$

Дифференцируя равенство (1) по t и подставляя результат во второе уравнение данной системы, получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно y:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y - 2. \tag{2}$$

Частным решением дифференциального уравнения (2) является $y_1 = 2$. Теперь ищем общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0. \tag{3}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2-1=0$$

имеет действительные корни $r_1=1$, $r_2=-1$.

Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения (3) являются функции e^t и e^{-t}, а общим решением — их линейная комбинация: $y=C_1e^t+C_2e^{-t}$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$Y=y+y_1=C_1e^t+C_2e^{-t}+2.$$

Следовательно,

$$z=\frac{dY}{dt}+1=C_1e^t-C_2e^{-t}+1.$$

Пример 3. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=x+z,\\ \frac{dz}{dt}&=y-x.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Последовательно дифференцируя первое из уравнений, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x-y-z-x=-y-z,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=-\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}=-x-z-y+x=-y-z.$$

Вычитая из второго полученного равенства первое, имеем

$$\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^3-r^2=0,$$

или

$$r^2(r-1)=0$$

имеет два кратных корня $r_{1,2}=0$ и третий корень $r_3=1$.

Общее решение полученного линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x=C_1+C_2t+C_3e^t.$$

Тогда

$$y=x-\frac{dx}{dt}=C_1+C_2t+C_3e^t-C_2-C_3e^t=(C_1-C_2)+C_2t,$$

следовательно,

$$z=\frac{dy}{dt}-x=(C_2-C_1)-C_2t-C_3e^t.$$

Пример 4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y''-z&=0,\\ z''-y&=0,\end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y=1$, $y'=1$, $z=1$, $z'=0$ при $x=0$.

Решение. Дважды продифференцируем первое уравнение системы по x:

$$y^{(IV)}-z''=0,$$

а затем вместо второй производной z'' подставляем ее значение, найденное из второго уравнения системы, тогда

$$y^{(IV)}-y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^4-1=0$$

имеет четыре корня — два действительных: $r_1=1$, $r_2=-1$ и два мнимых: $r_3=i$, $r_4=-i$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x. \qquad (*)$$

Дважды дифференцируя общее решение, находим

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x,$$
$$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.$$

Из первого уравнения заданной системы следует, что $z=y''$. Подставляя это значение в левую часть выражения для второй производной, получаем

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x. \qquad (**)$$

Совокупность уравнений (*) и (**) является общим решением заданной системы

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,\\ z&=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x.\end{aligned}\right\}$$

Далее имеем

$$z'=C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\sin x-C_4\cos x.$$

Для удовлетворения заданных начальных условий имеем систему

$$\left.\begin{aligned} y&=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,\\ y'&=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x,\\ z&=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x,\\ z'&=C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\sin x-C_4\cos x.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя в эту систему начальные значения, получаем

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 + C_3 + 0, \\ 1 &= C_1 - C_2 - 0 + C_4, \\ 1 &= C_1 + C_2 - C_3 - 0, \\ 0 &= C_1 - C_2 + 0 - C_4. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$, $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{1}{2}$. Искомое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x, \\ z &= \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned}\right\}$$

Задача 2. Две цепи A и B (рис. 30) находятся в магнитной связи при заданном коэффициенте M взаимной индукции. Кроме того,

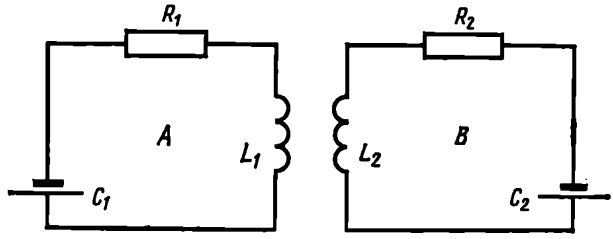


Рис. 30

известно, что L_1, R_1 и C_1 — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость цепи A соответственно; L_2, R_2 и C_2 — аналогичные величины для цепи B. Найти закон изменения силы тока i в цепи A, предполагая, что:

а) сопротивления цепей R_1 и R_2 весьма малы;

б) цепи настроены в унисон, т. е. $C_1 L_1 = C_2 L_2$.

Решение. В цепи A возникают электродвижущие силы: индукции $-M \frac{di_2}{dt}$ и самоиндукции $-L \frac{di_1}{dt}$; напряжение на конденсаторе

$$-\frac{Q}{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt.$$

Следовательно,

$$R_1 i_1 = -M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt. \qquad (1)$$

Аналогично, для цепи B имеем

$$R_2 i_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) составляем систему дифференциальных уравнений процесса

$$\left.\begin{aligned} M\frac{di_2}{dt}+L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt=0,\\ M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt=0,\end{aligned}\right\}$$

или, дифференцируя,

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2i_2}{dt^2}+L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}+R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1}i_1=0,\\ M\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2\frac{d^2i_2}{dt^2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_2}i_2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Проинтегрируем полученную систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Для этого исключим из уравнений системы (3) величину $\frac{d^2i_2}{dt^2}$. Тогда

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2R_1\frac{di_1}{dt}-MR_2\frac{di_2}{dt}+\frac{L_2}{C_1}i_1-\frac{M}{C_2}i_2=0.$$

Дифференцируя полученное уравнение, находим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+L_2R_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-MR_2\frac{d^2i_2}{dt^2}+\frac{L_2}{C_1}\frac{di_1}{dt}-\frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt}=0. \qquad (4)$$

Из первого уравнения системы (3) найдем величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$:

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2}=-L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-R_1\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C_1}i_1 \qquad (5)$$

и подставим ее в уравнение (4). Тогда

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{R_2}{C_1}i_1-\frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt}=0.$$

Продифференцируем уравнение (5):

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_2}{dt^4}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+$$
$$+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{R_2}{C_1}\frac{di_1}{dt}-\frac{M}{C_2}\frac{d^2i_2}{dt^2}=0.$$

Вторично заменяя величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ ее значением (5), получим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_2}{dt^4}+(L_2R_1+L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+$$
$$+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2}i_1=0. \qquad (6)$$

Сокращаем уравнение (6) на L_1L_2:

$$\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4}+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^3i_1}{dt^3}+\left(\frac{1}{C_2L_2}+\frac{1}{C_1L_1}+\frac{R_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+$$
$$+\left(\frac{R_1}{L_1}\frac{1}{C_2L_2}+\frac{R_2}{L_2}\frac{1}{C_1L_1}\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1L_1}\frac{1}{C_2L_2}i_1=0. \qquad (7)$$

Полученное уравнение является неполным линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка. Решив уравнение (7), находим силу тока i в цепи A.

Так как цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1 = C_2L_2$ и сопротивлениями R_1 и R_2 можно пренебречь, то дифференциальное уравнение (7) можно записать в более простом виде

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4} + \frac{2}{C_1L_1}\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1^2L_1^2}i_1 = 0.$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)r^4 + \frac{2}{C_1L_1}r^2 + \frac{1}{C_1^2L_1^2} = 0. \qquad (8)$$

Пусть

$$\frac{M^2}{L_1L_2} = k, \quad \frac{1}{C_1L_1} = n^2.$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$(1 - k^2)r^4 + 2n^2r^2 + n^4 = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) имеет следующие корни: $r_1 = \frac{ni}{\sqrt{1+k}}$, $r_2 = -\frac{ni}{\sqrt{1+k}}$, $r_3 = \frac{ni}{\sqrt{1-k}}$, $r_4 = -\frac{ni}{\sqrt{1-k}}$. Искомое общее решение

$$i = C_1 \sin\frac{n}{\sqrt{1+k}}t + C_2\cos\frac{n}{\sqrt{1+k}}t + C_3\sin\frac{n}{\sqrt{1-k}}t + C_4\cos\frac{n}{\sqrt{1-k}}t.$$

III. Интегрируемые комбинации (непосредственный способ)

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, получающееся как следствие уравнений системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и легко интегрирующееся; например, уравнение

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

или уравнение, сводящееся заменой переменных к интегрируемому типу дифференциальных уравнений. Непосредственный метод интегрирования сводится к образованию с помощью сложения, вычитания, деления данных уравнений интегрируемых комбинаций, т. е. легко интегрируемых дифференциальных уравнений, полученных из данной системы вида

$$\varphi\left(t, U, \frac{dU}{dt}\right) = 0; \qquad (3\ 45)$$

здесь U — некоторая функция от искомых функций, не содержащая t. В случае линейной однородной системы с постоянными коэффициентами интегрируемая комбинация есть дифференциальное уравнение

с разделенными переменными; в случае линейной неоднородной системы — линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл; если число их равно числу уравнений системы, то интегрирование закончено; в противном случае получается система с меньшим числом неизвестных функций.

Задача облегчается, если удается найти один или несколько независимых первых интегралов системы, так как в этом случае порядок системы понижается.

Иногда нормальную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

полезно записать в симметрической форме

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \tag{3.47}$$

Тогда при нахождении первых интегралов системы можно использовать свойство ряда равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n} \tag{3.48}$$

(причем необязательно, чтобы все отношения участвовали в этой комбинации).

Множители k_i подбирают таким образом, чтобы знаменатель равнялся нулю, а числитель был полным дифференциалом или же знаменатель не равнялся нулю, но числитель был дифференциалом той комбинации переменных, которой выражается знаменатель.

В симметрическую систему переменные входят равноправно, что в ряде случаев облегчает нахождение интегрируемых комбинаций.

Пример 5. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= x. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Складывая почленно уравнения системы, находим первую интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + x,$$

откуда

$$\frac{d(x+y)}{dt}=x+y, \quad \text{или} \quad \frac{d(x+y)}{x+y}=dt.$$

В результате интегрирования полученного дифференциального уравнения имеем

$$\ln(x+y)=t+C^*.$$

Потенцируя, находим

$$x+y=e^{C^*+t}=e^{C^*}e^t=C_1^*e^t,$$

откуда

$$\frac{x+y}{e^t}=C_1^*. \tag{1}$$

Почленно вычитая из первого уравнения системы второе, находим вторую интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=y-x=-(x-y),$$

откуда

$$\frac{d(x-y)}{dt}=-(x-y), \quad \text{или} \quad \frac{d(x-y)}{x-y}=-dt.$$

Интегрируя, находим

$$\ln(x-y)=-t+C^{**},$$

или, после потенцирования

$$x-y=e^{C^{**}-t}=C_2^*e^{-t},$$

откуда

$$\frac{x-y}{e^{-t}}=C_2^*. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) определяем решение данной системы:

$$x=\frac{1}{2}(C_1^*e^t+C_2^*e^{-t}), \quad y=\frac{1}{2}(C_1^*e^t-C_2^*e^{-t}),$$

или

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}, \quad y=C_1e^t-C_2e^{-t}.$$

Пример 6. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y,\\ \frac{dy}{dt}&=-x.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Умножим почленно уравнения заданной системы соответственно на x и y. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dx}{dt} &= xy, \\ y\frac{dy}{dt} &= -xy. \end{aligned}\right\}$$

Складывая полученные уравнения, находим интегрируемую комбинацию

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0,$$

откуда

$$xdx+ydy=0.$$

После интегрирования имеем

$$x^2+y^2=2C.$$

Заменяя $2C$ на C_1^2, получаем первый интеграл

$$x^2+y^2=C_1^2. \tag{1}$$

Решая это равенство относительно y и ограничиваясь его положительными значениями, имеем

$$y=\sqrt{C_1^2-x^2}.$$

Полученное значение y подставляем в первое уравнение данной системы, тогда

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_1^2-x^2}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1^2-x^2}}=dt,$$

откуда, в результате интегрирования, получим

$$\arcsin\frac{x}{C_1}=t+C_2$$

или первый интеграл системы

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2. \tag{2}$$

Первые интегралы (1) и (2) независимы и их совокупность образует общий интеграл данной системы.

Пример 7. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, записанную в симметрической форме

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Решение. Так как $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, то $xdx = -ydy$ и интегрируемая комбинация

$$xdx + ydy = 0.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим первый интеграл

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Из второго уравнения

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{y^2 - x^2},$$

имеем

$$(y^2 - x^2)\,dx = ydz,$$

или

$$y^2dx - x^2dx - ydz = 0.$$

Сокращая на y, получаем

$$ydx - \frac{x^2}{y}\,dx - dz = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что $-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, имеем

$$-\frac{x}{y}\,dx = dy. \qquad (2)$$

Подставим соотношение (2) в равенство (1):

$$ydx + xdy - dz = 0;$$

вторая интегрируемая комбинация принимает вид

$$d(xy) - dz = 0, \text{ или } d(xy - z) = 0,$$

$$\text{откуда } xy - z = C_2.$$

Пример 8. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, записанную в симметрической форме

$$\frac{dx}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Решение. Второе уравнение системы

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

после умножения на $2x$ принимает вид

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Интегрируя полученную интегральную комбинацию, имеем

$$\ln y = \ln z + \ln C_1 = \ln C_1 z,$$

$$\text{или } y = C_1 z, \text{ откуда } \frac{y}{z} = C_1.$$

Умножая числитель и знаменатель первого из отношений данной системы на x, второго на y, третьего на z и составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy},$$

откуда, умножая равенство на $2x$, имеем

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}, \text{ или } \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя полученное равенство, находим

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln y + \ln C_2 = \ln C_2 y$$

или, после потенцирования,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 y,$$

откуда

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

Искомые первые интегралы

$$\frac{y}{z} = C_1, \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

Пример 9. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}.$$

Решение. Первое уравнение системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

умножим на z. В результате получим интегрируемую комбинацию — дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

интегрируя которое, имеем

$$\ln x + \ln C_1 = \ln y, \text{ или } \ln C_1 x = \ln y,$$

т. е.

$$C_1 x = y,$$

откуда первый интеграл системы

$$\frac{y}{x}=C_1. \qquad (*)$$

Второе уравнение системы запишем в виде

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}.$$

Полагая в полученном равенстве $y=C_1x$, имеем

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dx}{-(x^2+C_1^2x^2)}=\frac{dz}{-(1+C_1^2)\,x^2}.$$

Умножая крайние отношения на x, находим

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-(1+C_1^2)\,x}.$$

Тогда интегрируемая комбинация принимает вид

$$(1+C_1^2)\,xdx+zdz=0.$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, получаем

$$(1+C_1^2)\,x^2+z^2=C_2.$$

Подставляя вместо C_1 соотношение (*), находим второй интеграл системы

$$x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Пример 10. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, записанную в симметрическом виде

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}.$$

Решение. Интегрируя первое уравнение системы

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

приходим к равенству

$$\ln C_1x=\ln y,$$

откуда находим первый интеграл системы $\frac{y}{x}=C_1$.

Используя свойства ряда равных отношений, составляем производную пропорцию и записываем систему в виде

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dx+dy}{x+y}.$$

Выпишем последние два отношения:

$$\frac{dz}{x+y}=\frac{dx+dy}{x+y}.$$

Отсюда следует, что вторая интегрируемая комбинация

$$dz = dx + dy.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$z = x + y + C_2,$$

или

$$z - x - y = C_2.$$

Упражнения

Проинтегрировать методом последовательного интегрирования или методом исключения следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\left.\begin{aligned} y' &= -2y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y = C_1 e^{-2x}$, $z = C_2 e^x$.

2. $\left.\begin{aligned} y' &= 0, \\ z' &= -z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y = C_1$, $z = C_2 e^{-x}$.

3. $\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= 2z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2$, $z = C_1 e^{2x}$.

4. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2, \\ \frac{dy}{dt} &= 2y, \\ \frac{dz}{dt} &= -z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $z = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{2t}$, $x = C_3 e^t - 2C_2 e^{2t}$.

5. $\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= y. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$.

Проинтегрировать с помощью интегрируемых комбинаций следующие системы дифференциальных уравнений:

6. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

Отв. $x = C_1 z$, $y = C_2 z$.

7. $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$.

Отв. $\frac{x-y}{x-z} = C_1$, $(x-y)^2 (x+y+z) = C_2$.

8. $\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}$.

Отв. $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

9. $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z-y)^2}$.

Отв. $y^2 - z^2 = C_1$, $2x + (z-y)^2 = C_2$.

10. $\frac{z\,dy}{z-1} = \frac{(y-x)\,dz}{1} = \frac{-z\,dx}{-z}$.

Отв. $z(y-x) = C_1$, $(y-x)\,e^{\frac{x}{z(y-x)}} = C_2$.

11. $\dfrac{dx}{y(x+y)}=\dfrac{dy}{-x(x+y)}=\dfrac{dz}{(x-y)(2x+2y+2z)}$.

Отв. $x^2+y^2=C_1$, $(x+y)(x+y+z)=C_2$.

Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений:

12. $\left.\begin{aligned} y'&=2xy^2,\\ z'&=\dfrac{z-x}{x}. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=-\dfrac{1}{x^2+C_1}$, $z=x(C_2-\ln x)$.

13. $\left.\begin{aligned} y'&=\dfrac{2x}{1+x^2}y,\\ z'&=-\dfrac{1}{x}z+y+x. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=C_1(1+x^2)$, $z=\dfrac{C_2}{x}+\dfrac{C_1}{2}x+\dfrac{C_1}{4}x^3+\dfrac{x^2}{3}$.

14. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=-x+y+z,\\ \frac{dy}{dt}&=x-y+z,\\ \frac{dz}{dt}&=x+y-z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $x=C_1e^t+(C_2+C_3)e^{-2t}$, $y=C_1e^t-C_2e^{-2t}$, $z=C_1e^t-C_3e^{-2t}$.

15. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} y''&=y^2+z,\\ z'&=-2yy'+y, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y=1$, $y'=1$, $z=0$ при $x=0$.

Отв. $\left.\begin{aligned} y&=e^x,\\ z&=e^x-e^{2x}. \end{aligned}\right\}$

16. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти закон движения снаряда.

Отв. $x=v_0t\cos\alpha$, $y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2$.

17. Снаряд вылетает из орудия со скоростью 800 м/с под углом 45° к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, наибольшую высоту подъема снаряда и место его падения.

Отв. $h_{\text{макс}}=16{,}3$ км, $s\cong 65$ км.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx}&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n+f_1(x),\\ \frac{dy_2}{dx}&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n+f_2(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dx}&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n+f_n(x) \end{aligned}\right\} \qquad (3.49)$$

или в сокращенной записи

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.50}$$

где a_{kl} — постоянные действительные коэффициенты. Функции $f_k(x)$ предполагаются определенными и непрерывными на интервале (a, b).

Если при рассматриваемых значениях x все функции $f_k(x) \equiv 0$, то система (3.49) называется *однородной*.

Система вида (3.49) (или (3.50)) называется *неоднородной*. Общее решение неоднородной системы (3.49) состоит из общего решения соответствующей однородной системы

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} z_l \tag{3.51}$$

и одного частного решения неоднородной системы (3.49)

$$y_1 = y_1^{(1)}, \; y_2 = y_2^{(1)}, \; \ldots, \; y_n = y_n^{(1)}. \tag{3.52}$$

Суммируя решения (3.51) и (3.52), получаем общее решение системы (3.49):

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik}. \tag{3.53}$$

Общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений можно построить методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), исходя из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы (3.51). Метод состоит в нахождении решения системы (3.49) в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik}, \tag{3.53'}$$

где $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции x. Эти функции определяются из системы

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} = f_k(x). \tag{3.53''}$$

Решаем эту систему как алгебраическую относительно $C_i'(x)$:

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$\frac{dC_i(x)}{dx} = \varphi_i(x).$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения, находим все искомые функции

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + C_i.$$

Подставляя найденные функции в уравнение (3.53'), получаем общее решение системы (3.49):

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \int \varphi_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik}. \qquad (3.53''')$$

Система линейных дифференциальных уравнений (3.49) всегда интегрируется в квадратурах, так как соответствующая однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l \qquad (3.54)$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций. Построение фундаментальной системы решений соответствующей однородной линейной системы дифференциальных уравнений выполняется методом Эйлера.

Решение системы (3.54) ищем в виде

$$y_1 = \beta_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \beta_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = \beta_n e^{\lambda x}, \qquad (3.55)$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \lambda$ — постоянные числа, подлежащие определению, причем хотя бы одно из них должно быть отличным от нуля.

Находим производные решений (3.55):

$$\frac{dy_1}{dx} = \lambda\beta_1 e^{\lambda x},\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda\beta_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ \frac{dy_n}{dx} = \lambda\beta_n e^{\lambda x}. \qquad (3.56)$$

Подставляя значения (3.55) и (3.56) в систему (3.54), имеем

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{12}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{1n}\beta_n e^{\lambda x} = \lambda\beta_1 e^{\lambda x},\\ &a_{21}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{22}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{2n}\beta_n e^{\lambda x} = \lambda\beta_2 e^{\lambda x},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{n2}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{nn}\beta_n e^{\lambda x} = \lambda\beta_n e^{\lambda x}. \end{aligned}\right\}$$

Сокращая все уравнения этой системы на общий множитель $e^{\lambda x}$ и перенося свободные члены в левую часть, получаем

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0,\\ &a_{21}\beta_1 + (a_{22}-\lambda)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\beta_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.57)$$

Для того чтобы полученная однородная линейная система алгебраических уравнений имела ненулевое решение относительно β_i, необходимо и достаточно потребовать равенства нулю ее определителя, т. е. чтобы λ было корнем уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.58)$$

Уравнение (3.58) есть уравнение n-й степени относительно λ и называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* системы (3.54). Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение вида (3.55). Могут представиться следующие случаи.

Случай 1. Все n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения действительные и различные числа. Полагая в системе (3.57) $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda_i)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\beta_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

Ненулевое решение найденной системы есть $\beta_1 = \beta_{i1}$; $\beta_2 = \beta_{i2}$, ..., $\beta_n = \beta_{in}$. Подставляя эти значения и $\lambda = \lambda_i$ в соотношения (3.55), получаем решение однородной системы (3.54), соответствующее корню λ_i:

$$y_{i1} = \beta_{i1}e^{\lambda_i x}, \quad y_{i2} = \beta_{i2}e^{\lambda_i x}, \quad \ldots, \quad y_{in} = \beta_{in}e^{\lambda_i x}.$$

Строим решения, соответствующие всем корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В этом случае фундаментальная система решений:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{11}e^{\lambda_1 x}, \ \beta_{12}e^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ \beta_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \beta_{21}e^{\lambda_2 x}, \ \beta_{22}e^{\lambda_2 x}, \ \ldots, \ \beta_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1}e^{\lambda_n x}, \ \beta_{n2}e^{\lambda_n x}, \ \ldots, \ \beta_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение системы (3.54) имеет вид

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i \beta_{ik} e^{\lambda_i x}. \tag{3.60}$$

Случай 2. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различные, причем среди них имеются комплексные. Пусть $a \pm ib$ — комплексные корни характеристического уравнения. Строим решение вида (3.55), соответствующее корню $a + bi$:

$$y_1 = (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)} i)\, e^{(a+bi)x},$$
$$y_2 = (\beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)} i)\, e^{(a+bi)x}, \ \ldots, \ y_n = (\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} i)\, e^{(a+bi)x}. \tag{3.61}$$

Отделяя действительные и мнимые части, получим два действительных линейно независимых частных решения однородной системы (3.54):

$$y_{11} = e^{ax}(\beta_1^{(1)} \cos bx - \beta_1^{(2)} \sin bx), \quad y_{12} =$$
$$= e^{ax}(\beta_2^{(1)} \cos bx - \beta_2^{(2)} \sin bx), \ \ldots, \ y_{1n} = e^{ax}(\beta_n^{(1)} \cos bx - \beta_n^{(2)} \sin bx). \tag{3.62}$$

Действительные решения, соответствующие сопряженному корню $a - bi$, будут линейно зависимыми с решениями (3.62). Следовательно, паре сопряженных комплексных корней $a \pm bi$ соответствуют два действительных линейно независимых частных решения вида (3.62).

Далее строим частные решения для всех пар комплексных сопряженных корней и всех действительных корней (в случае их наличия). Общее решение однородной системы (3.54) представится линейной комбинацией построенных линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами.

Случай 3. Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть кратные. Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$y_1 = Q_1(x)\, e^{\lambda_1 x},\ y_2 = Q_2(x)\, e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = Q_n(x)\, e^{\lambda_1 x}, \qquad (3.63)$$

где $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ — многочлены x степени не выше k. Эти многочлены, в частном случае, могут вырождаться в постоянные числа. Среди коэффициентов этих многочленов k будут произвольными, остальные же выражаются через них. Один из произвольных коэффициентов полагаем поочередно равным единице, а остальные — равными нулю. Таким образом, строим k линейно независимых частных решений. Если λ_1 действительное число, то частные решения также действительные. Если λ_1 комплексный корень, равный $a+bi$, то сопряженный ему корень $a-bi$ является также корнем характеристического уравнения кратности k. Находим k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a+bi$. Отделяя в них действительные и мнимые части, получаем $2k$ линейно независимых действительных частных решений. Решения для корня $a-bi$ линейно зависимы с решениями для корня $a+bi$.

В случае существования других кратных или простых корней (кроме λ_1) строим n линейно независимых действительных частных решений для всех корней и берем их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами. В результате получаем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (3.54).

Пример 1. Найти методом Эйлера общее решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - z, \\ z' &= -4y + 4z. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Частное решение заданной системы ищем в виде

$$y = \beta_1 e^{\lambda x},\ z = \beta_2 e^{\lambda x}.$$

Составляем соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - (-1)\cdot(-4) = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Представим полученное неполное квадратное уравнение в виде

$$\lambda(\lambda - 5) = 0.$$

корни характеристического уравнения действительны и различны: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ (первый случай корней характеристического уравнения).

Построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 0$. Согласно соотношениям (3.59) β_1 и β_2 следует искать из системы

$$\left.\begin{aligned}(1-0)\beta_1 - 1\cdot\beta_2 &= 0,\\ -4\beta_1 + (4-0)\beta_2 &= 0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 - \beta_2 &= 0,\\ 4\beta_1 - 4\beta_2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Система состоит из линейно зависимых уравнений, поэтому сводится к уравнению

$$\beta_1 - \beta_2 = 0,$$

следовательно, одно из искомых чисел β_1 или β_2 можно выбирать произвольно. Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = 1$.

Итак, характеристическому числу $\lambda_1 = 0$ соответствует частное решение

$$y_1 = 1\cdot e^{0\cdot x} = 1,\quad z_1 = 1\cdot e^{0\cdot x} = 1.$$

Найдем частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 5$. Числа β_1 и β_2 находим из системы

$$\left.\begin{aligned}(1-5)\beta_1 - 1\cdot\beta_2 &= 0,\\ -4\beta_1 + (4-5)\beta_2 &= 0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}-4\beta_1 - \beta_2 &= 0,\\ -4\beta_1 - \beta_2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Эта система сводится к одному уравнению

$$4\beta_1 + \beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = -4$.

Итак, характеристическому числу $\lambda_2 = 5$ соответствует частное решение

$$y_2 = 1\cdot e^{5x} = e^{5x},\quad z_2 = -4e^{5x}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\cdot 1 + C_2e^{5x} = C_1 + C_2e^{5x};$$
$$z = C_1z_1 + C_2z_2 = C_1\cdot 1 + C_2\cdot(-4)e^{5x} = C_1 - 4C_2e^{5x}.$$

Пример 2. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}y' &= y - z,\\ z' &= -4y + 4z,\end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $z = 6$ при $x = 0$.

Решение. Подставляя начальные условия в общее решение системы, имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=1,\\ C_1-4C_2&=6,\end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1=2$, $C_2=-1$.

Искомое частное решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y&=2-e^{5x},\\ z&=2+4e^{5x}.\end{aligned}\right\}$$

Пример 3. Найти методом Эйлера общее решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y'&=2y-3z,\\ z'&=3y+2z.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2-4\lambda+13=0.$$

Корни характеристического уравнения комплексные: $\lambda_1=2+3i$, $\lambda_2=2-3i$ (второй случай корней характеристического уравнения). Частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1=2+3i$, ищем в виде

$$y=\beta_1 e^{(2+3i)x},\quad z=\beta_2 e^{(2+3i)x}.$$

Числа β_1 и β_2 определяем из системы

$$\left.\begin{aligned} (2-2-3i)\beta_1-3\beta_2&=0,\\ 3\beta_1+(2-2-3i)\beta_2&=0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} -3i\beta_1-3\beta_2&=0,\\ 3\beta_1-3i\beta_2&=0.\end{aligned}\right\}$$

Если второе уравнение системы умножить на i, то система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} -3i\beta_1-3\beta_2&=0,\\ -3i\beta_1-3\beta_2&=0,\end{aligned}\right\}$$

т. е. состоит из двух одинаковых уравнений и поэтому сводится к одному уравнению

$$-3i\beta_1-3\beta_2=0,$$

или

$$i\beta_1+\beta_2=0.$$

Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = -i$. Частное решение имеет вид

$$y = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x),$$

$$z = -ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-ie^{3xi}) = e^{2x}[-i(\cos 3x + i \sin 3x)] =$$
$$= e^{2x}(-i \cos 3x - i^2 \sin 3x) = e^{2x}(\sin 3x - i \cos 3x).$$

Отделяя действительные и мнимые числа, получаем два действительных линейно независимых частных решения

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos 3x, \quad & z_1 &= e^{2x} \sin 3x, \\ y_2 &= e^{2x} \sin 3x, \quad & z_2 &= -e^{2x} \cos 3x. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение системы является линейной комбинацией построенных линейно независимых решений

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),$$
$$z = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x).$$

Пример 4. Найти методом Эйлера общее решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} &= -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} &= 10x - 3y - 9z. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -4 \\ -12 & 5-\lambda & 12 \\ 10 & -3 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные и кратные: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ (третий случай корней характеристического уравнения).

Частное решение, соответствующее простому характеристическому числу $\lambda_1 = -1$, ищем в виде

$$x = \beta_1 e^{-t}, \quad y = \beta_2 e^{-t}, \quad z = \beta_3 e^{-t}.$$

Числа β_1, β_2, β_3 находим из системы

$$\left.\begin{aligned} (5+1)\beta_1 - \beta_2 - 4\beta_3 &= 0, \\ -12\beta_1 + (5+1)\beta_2 + 12\beta_3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 6\beta_1 - \beta_2 - 4\beta_3 &= 0, \\ -12\beta_1 + 6\beta_2 + 12\beta_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Разделив второе уравнение системы на (—6), имеем

$$\left.\begin{aligned} 6\beta_1-\beta_2-4\beta_3=0,\\ 2\beta_1-\beta_2-2\beta_3=0. \end{aligned}\right\}$$

Пусть $\beta_1=1$. Тогда система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \beta_2+4\beta_3=6,\\ \beta_2+2\beta_3=2. \end{aligned}\right\}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, имеем $\beta_3=2$ и $\beta_2=$ $=-2$. Искомое частное решение

$$x=e^{-t},\quad y=-2e^{-t},\quad z=2e^{-t}.$$

Построим два линейно независимых частных решения, соответствующих кратному характеристическому числу $\lambda_2=\lambda_3=1$. Согласно соотношениям (3.61) имеем

$$x=(A_1t+A_2)\,e^t,\quad y=(B_1t+B_2)\,e^t,\quad z=(C_1t+C_2)\,e^t.$$

Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 находим, подставляя это решение в заданную систему дифференциальных уравнений. Тогда, после группировки и сокращения на e^t, имеем

$$\left.\begin{aligned} A_1t+A_1+A_2=(-4A_1+2B_1+5C_1)\,t-4A_2+2B_2+5C_2,\\ B_1t+B_1+B_2=(6A_1-B_1-6C_1)\,t+6A_2-B_2-6C_2,\\ C_1t+C_1+C_2=(-8A_1+3B_1+9C_1)\,t-8A_2+3B_2+9C_2. \end{aligned}\right\}$$

Приравнивая коэффициенты при независимой переменной t и свободные члены, получим

$$\left.\begin{aligned} -5A_1+2B_1+5C_1=0,\\ 6A_1-2B_1-6C_1=0,\\ -8A_1+3B_1+8C_1=0,\\ -5A_2+2B_2+5C_2=A_1,\\ 6A_2-2B_2-6C_2=B_1,\\ -8A_2+3B_2+8C_2=C_1. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, находим

$$A_1=C_1,\quad A_2=C_1+C_2,\quad B_1=0,\quad B_2=3C_1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Искомое решение принимает вид

$$x=(C_2t+C_2+C_3)\,e^t,\quad y=3C_2e^t,\quad z=(C_2t+C_3)\,e^t.$$

Линейно независимые частные решения могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} x_2=(t+1)\,e^t,\quad y_2=3e^t,\quad z_2=te^t,\\ x_3=e^t,\qquad\quad x_3=0,\qquad z_3=e^t. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение системы является линейной комбинацией независимых частных решений

$$x = C_1e^{-t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t,$$
$$y = -2C_1e^{-t} + 3C_2e^t,$$
$$z = 2C_1e^{-t} + (C_2t + C_3)e^t.$$

Пример 5. Найти общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - 2z + 7, \\ z' &= y - z + 4. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Предварительно проинтегрируем методом Эйлера соответствующую однородную систему

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - 2z, \\ z' &= y - z. \end{aligned}\right\}$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения чисто мнимые: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = i$, ищем в виде

$$y = \beta_1 e^{ix}, \quad z = \beta_2 e^{ix}.$$

Числа β_1 и β_2 определяем из системы

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda_1)\beta_1 - 2\beta_2 &= 0, \\ \beta_1 - (1+\lambda_1)\beta_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя значение $\lambda_1 = i$, имеем

$$\left.\begin{aligned} (1-i)\beta_1 - 2\beta_2 &= 0, \\ \beta_1 - (1+i)\beta_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Умножая второе уравнение этой системы на $(1-i)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} (1-i)\beta_1 - 2\beta_2 &= 0, \\ (1-i)\beta_1 - 2\beta_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

т. е. систему можно свести к одному уравнению

$$(1-i)\beta_1 - 2\beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_1 = 2$, тогда $\beta_2 = 1 - i$. Частное решение будет иметь вид

$$y = 2e^{ix}, \quad z = (1 - i)\, e^{ix}.$$

Применяя формулу Эйлера $e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, представим частное решение в виде

$$y = 2e^{ix} = 2(\cos x + i \sin x) = 2\cos x + i \cdot 2 \sin x,$$
$$z = (1 - i)\, e^{ix} = \cos x + i \sin x - i(\cos x + i \sin x) =$$
$$= \cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x).$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем два действительных линейно независимых частных решения:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2\cos x, \quad z_1 = \cos x + \sin x, \\ y_2 &= 2\sin x, \quad z_2 = \sin x - \cos x. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение однородной системы является линейной комбинацией линейно независимых частных решений:

$$y = 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x,$$
$$z = (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x.$$

Частное решение заданной системы будем искать в упрощенном виде

$$y_1 = b, \quad z_1 = c,$$

где b и c — постоянные, подлежащие определению (так как свободные члены заданной системы постоянные величины). Дифференцируя частное решение по x, имеем

$$y_1' = 0, \quad z_1' = 0.$$

Подставляя частное решение и его производную в заданную систему, получаем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= b - 2c + 7, \\ 0 &= b - c + 4, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2c - b &= 7, \\ c - b &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, находим $b = -1$; $c = 3$. Частное решение имеет вид

$$y_1 = -1; \quad z_1 = 3.$$

Общее решение заданной неоднородной линейной системы

$$y = 2(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 1,$$
$$z = (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x + 3.$$

Пример 6. Найти методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа) общее решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y' &= -2y + z - e^{2x}, \\ z' &= -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Соответствующая однородная система

$$\left.\begin{aligned} y' &= -2y + z, \\ z' &= -3y + 2z \end{aligned}\right\}$$

имеет характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ являются действительными корнями характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде

$$y = \beta_1 e^{\lambda x}, \quad z = \beta_2 e^{\lambda x}.$$

Частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 1$, есть

$$y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_1 = \beta_2 e^{\lambda_1 x}.$$

Числа β_1 и β_2 определяют из системы

$$\left.\begin{aligned} -3\beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ -3\beta_1 + \beta_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая сводится к одному уравнению

$$3\beta_1 - \beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = 3$. Искомое частное решение

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = 3e^x.$$

Аналогично, частное решение для корня $\lambda_2 = -1$ имеет вид

$$y_2 = \beta_1 e^{\lambda_2 x}, \quad z_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Числа β_1 и β_2 в этом случае находим из системы

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ -3\beta_1 + 3\beta_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая сводится к уравнению

$$\beta_1 - \beta_2 = 0.$$

Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = 1$. Искомое частное решение

$$y_2 = e^{-x}, \quad z_2 = e^{-x}.$$

Общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Общее решение заданной неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-x}, \\ z &= 3C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{-x}, \end{aligned}\right\}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — подлежащие определению непрерывно дифференцируемые функции x.
Находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, используя систему

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^{-x} &= -e^{2x}, \\ 3C_1'(x)\, e^x + C_2'(x)\, e^{-x} &= 6e^{2x}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, имеем

$$C_1'(x) = \frac{7}{2} e^x, \quad C_2'(x) = -\frac{9}{2} e^{3x}.$$

Интегрируем полученные выражения:

$$\frac{dC_1(x)}{dx} = \frac{7}{2} e^x,$$

или

$$dC_1(x) = \frac{7}{2} e^x\, dx,$$

откуда

$$C_1(x) = \frac{7}{2} e^x + C_1;$$

$$\frac{dC_2(x)}{dx} = -\frac{9}{2} e^{3x},$$

или

$$dC_2(x) = -\frac{9}{2} e^{3x}\, dx,$$

откуда

$$C_2(x) = -\frac{3}{2} e^{3x} + C_2.$$

Следовательно, общее решение заданной неоднородной системы имеет вид

$$y = \left(\frac{7}{2} e^x + C_1\right) e^x + \left(-\frac{3}{2} e^{3x} + C_2\right) e^{-x} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2e^{2x},$$
$$z = 3\left(\frac{7}{2} e^x + C_1\right) e^x + \left(-\frac{3}{2} e^{3x} + C_2\right) e^{-x} = 3C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 9e^{2x}.$$

Задача. Вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества; x и y количества веществ P и Q, образовавшихся к моменту t. Найти закон их изменений, если в начальный момент $x=0$, $y=0$, а через 1 час $x=\frac{3}{8}c$, $y=\frac{1}{8}c$ (здесь c — первоначальное количество вещества A).

Решение. В момент t скорости образования веществ P и Q таковы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=k_1(c-x-y),\\ \frac{dy}{dt}&=k_2(c-x-y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(так как к этому моменту количество неразложившегося вещества A равно $c-x-y$). Уравнения (1) являются системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференцируя первое уравнение, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right). \tag{2}$$

Подставляя в уравнение (2) значение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы (1), получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left[\frac{dx}{dt}+k_2(c-x-y)\right]. \tag{3}$$

Исключая из уравнения (3) и первого уравнения системы (1) значение $\frac{dx}{dt}$, находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dx}{dt}=0. \tag{4}$$

Уравнение (4) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с характеристическим уравнением

$$r^2+(k_1+k_2)r=0.$$

Это неполное квадратное уравнение имеет корни: $r_1=0$ и $r_2=-(k_1+k_2)$.

Таким образом, общее решение уравнения (4) принимает вид

$$x=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t}. \tag{5}$$

Для нахождения второго решения дифференцируем выражение (5), подставляем значения x и $\frac{dx}{dt}$ в первое уравнение системы и решаем его относительно y. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t},$$

$$-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t}=k_1(c-C_1-C_2e^{-(k_1+k_2)t}-y)$$

и второе решение

$$y = c + \frac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1 + k_2)t} - C_1. \tag{6}$$

Таким образом, решение системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{-(k_1 + k_2)t}, \\ y &= c + \frac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1 + k_2)t} - C_1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Определим C_1 и C_2, используя начальные условия: при $t = 0$ $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 - \frac{k_2}{k_1} C_2 &= c, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{k_1 c}{k_1 + k_2}, \\ C_2 &= -\frac{k_1 c}{k_1 + k_2}. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в решение системы, получим законы изменения величин x и y:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k_1 c}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)t}\right], \\ y &= \frac{k_2 c}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 находим из дополнительных условий: $x = \frac{3}{8}c$, $y = \frac{1}{8}c$ при $t = 1$.

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{3c}{8} &= \frac{k_1 c}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)}\right], \\ \frac{c}{8} &= \frac{k_2 c}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

откуда $\frac{k_1}{k_2} = 3$ и $k_1 = 3k_2$. Тогда имеем

$$\frac{c}{8} = \frac{c}{4}(1 - e^{-4k_2}),$$

или

$$e^{-4k_2} = \frac{1}{2}.$$

Далее

$$e^{4k_2} = 2,$$

или $4k_2 = \ln 2$, т. е.

$$k_2 = \frac{1}{4}\ln 2. \tag{10}$$

Следовательно,

$$k_1 = \frac{3}{4} \ln 2. \tag{11}$$

Суммируя уравнения (10) и (11), имеем $k_1 + k_2 = \ln 2$, или, потенцируя,

$$e^{k_1 + k_2} = 2.$$

Тогда

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{4}.$$

Подставляя эти значения в равенство (8), окончательно получаем

$$x = \frac{3c}{4}(1 - 2^{-t}) = \frac{3c}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right),$$

$$y = \frac{c}{4}(1 - 2^{-t}) = \frac{c}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right).$$

Метод Даламбера

Решение линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами удобно производить методом интегрируемых комбинаций. Для построения интегрируемых комбинаций существует *метод Даламбера*, основывающийся на непосредственном интегрировании.

1. Случай системы двух уравнений. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + F_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

Обозначим через λ множитель, на который надо умножить второе уравнение, чтобы получить интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + a_2\lambda)\, x + (b_1 + b_2\lambda)\, y + F_1 + \lambda F_2. \tag{3.65}$$

Цель будет достигнута, если

$$b_1 + b_2\lambda = \lambda(a_1 + a_2\lambda),$$

или

$$a_2\lambda^2 + (a_1 - b_2)\lambda - b_1 = 0. \tag{3.66}$$

Тогда имеем следующую интегрируемую комбинацию ($U = x + \lambda y$):

$$\frac{dU}{(a_1 + a_2\lambda)\, U + F_1 + \lambda F_2} = dt. \tag{3.67}$$

Уравнение (3.67) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пусть общий интеграл уравнения (3.67)

$$U = x + \lambda y = \Phi(t,\ \lambda,\ C). \tag{3.68}$$

Возможны следующие варианты:

а) корни квадратного уравнения (3.66) действительные и различные. Тогда имеем два интеграла системы (3.65):

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda_1 y &= \Phi(t,\ \lambda,\ C_1), \\ x + \lambda_2 y &= \Phi(t,\ \lambda,\ C_2); \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

б) корни квадратного уравнения (3.66) комплексные ($\lambda = \alpha \pm \beta i$). Приравнивая действительные и мнимые составляющие обеих частей уравнения

$$x + (\alpha + \beta i)\, y = \Phi(t,\ \alpha + \beta i,\ A + Bi), \tag{3.70}$$

также получим два интеграла. Здесь A, B — произвольные постоянные;

в) корни квадратного уравнения (3.66) кратные ($\lambda_1 = \lambda_2$). В этом случае получаем только один интеграл, который позволяет свести вопрос к интегрированию одного линейного уравнения с одной неизвестной функцией.

2. Случай системы трех уравнений. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + F_2(t), \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + F_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

Умножая второе уравнение на λ, третье на μ и складывая полученные результаты, имеем

$$\frac{d(x + \lambda y + \mu z)}{dt} = (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, x + (b_1 + b_2\lambda + b_3\mu)\, y + (c_1 + c_2\lambda + c_3\mu)\, z + \\ + F_1 + \lambda F_2 + \mu F_3.$$

Подберем λ и μ так, чтобы имели место равенства

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2\lambda + b_3\mu &= (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\,\lambda, \\ c_1 + c_2\lambda + c_3\mu &= (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\,\mu. \end{aligned}\right\} \tag{3.72}$$

Вводим подстановку $U = x + \lambda y + \mu z$ и получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dU}{(a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, U + (F_1 + \lambda F_2 + \mu F_3)} = dt. \tag{3.73}$$

Пусть общее решение этого уравнения имеет вид

$$U = \Phi(t,\ \lambda,\ \mu,\ C). \tag{3.74}$$

Определяем λ и μ. Для этого запишем систему (3.72) в виде

$$\frac{a_1+a_2\lambda+a_3\mu}{1}=\frac{b_1+b_2\lambda+b_3\mu}{\lambda}=\frac{c_1+c_2\lambda+c_3\mu}{\mu}=s.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a_2\lambda+a_3\mu&=s-a_1,\\ (b_2-s)\lambda+b_3\mu&=-b_1,\\ c_2\lambda+(c_3-s)\mu&=-c_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.75}$$

Запишем условие совместности системы (3.75):

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_1-s\\ b_2-s & b_3 & b_1\\ c_2 & c_3-s & c_1 \end{vmatrix}=0. \tag{3.76}$$

Это кубическое уравнение относительно s.

Различают три случая:

а) среди корней уравнения (3.76) нет равных ($s_1\neq s_2\neq s_3$). Определим для каждого корня системы (3.75) соответственно значения для λ и μ (т. е. λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3), а затем из уравнения (3.74) найдем все три интеграла;

б) среди корней есть двукратный. В этом случае ищем лишь два интеграла системы. Для получения окончательного результата следует проинтегрировать еще одно уравнение;

в) корень трехкратный. Тогда ищется лишь один интеграл; поэтому интегрирование будет сводиться к системе двух уравнений. В случае комплексного корня поступают аналогично разделу *А*.

Пример 7. Проинтегрировать методом Даламбера систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=6x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=3x+2y. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Умножим второе уравнение системы на λ и просуммируем с первым. Тогда

$$\frac{dx}{dt}+\lambda\frac{dy}{dt}=(6+3\lambda)x+(-1+2\lambda)y,$$

или

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(6+3\lambda)x+(2\lambda-1)y.$$

Интегрируемая комбинация будет получена, если

$$2\lambda-1=\lambda(6+3\lambda),$$

или

$$3\lambda^2+4\lambda+1=0.$$

Решая это квадратное уравнение, имеем $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$. В первом случае интегрируемая комбинация принимает вид

$$U_1 = x - \frac{1}{3}y$$

и

$$\frac{d\left(x-\frac{1}{3}y\right)}{(6+3\lambda)\left(x-\frac{1}{3}y\right)} = dt,$$

откуда

$$\frac{d\left(x-\frac{1}{3}y\right)}{5\left(x-\frac{1}{3}y\right)} = dt.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{1}{5}\ln\left(x-\frac{1}{3}y\right) = t + C,$$

или

$$\ln\left(x-\frac{1}{3}y\right) = 5(t+C).$$

Тогда имеем

$$x-\frac{1}{3}y = e^{5t+5C} = e^{5C}e^{5t}.$$

Умножая последнее равенство на 3, получаем

$$3x - y = 3e^{5C}e^{5t},$$

или

$$(3x-y)e^{-5t} = C_1.$$

Во втором случае (при $\lambda_2 = -1$) интегрируемая комбинация имеет вид

$$U_2 = x - y$$

и

$$\frac{d(x-y)}{[6+3(-1)](x-y)} = dt,$$

или

$$\frac{d(x-y)}{3(x-y)} = dt.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{1}{3}\ln(x-y) = t + C,$$

или

$$\ln(x-y) = 3(t+C),$$

откуда после потенцирования

$$x-y=e^{3t+3C}=e^{3C}e^{3t}.$$

Пусть $e^{3C}=C_2$, тогда имеем

$$(x-y)\,e^{-3t}=C_2.$$

Итак, общий интеграл системы имеет вид

$$(3x-y)\,e^{-5t}=C_1,$$
$$(x-y)\,e^{-3t}=C_2.$$

Упражнения

Проинтегрировать методом Эйлера системы линейных дифференциальных уравнений:

1. $\left.\begin{aligned} y'&=2y+z,\\ z'&=-6y-3z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=C_1+C_2e^{-3x}$,
$z=-2C_1-3C_2e^{-x}$.

2. $\left.\begin{aligned} y'&=y+z,\\ z'&=-10y-z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$,
$z=(-C_1+3C_2)\cos 3x-(3C_1+C_2)\sin 3x$.

3. $\left.\begin{aligned} y'&=-y+z,\\ z'&=-y-3z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$,
$z=[-C_1+C_2(1-x)]\,e^{-2x}$.

4. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=3x+12y-4z,\\ \frac{dy}{dt}&=-x-3y+z,\\ \frac{dz}{dt}&=-x-12y+6z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $x=-2C_1e^t-8C_2e^{2t}-3C_3e^{3t}$,
$y=C_1e^t+3C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$,
$z=2C_1e^t+7C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$.

5. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=21x-8y-19z,\\ \frac{dy}{dt}&=18x-7y-15z,\\ \frac{dz}{dt}&=16x-6y-15z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $x=C_1e^{-t}+(7C_2+11C_3)\cos t+(-11C_2+7C_3)\sin t$,
$y=-2C_1e^{-t}+(15C_2+9C_3)\cos t+(-9C_2+15C_3)\sin t$,
$z=2C_1e^{-t}+(-2C_2+8C_3)\cos t+(-8C_2-2C_3)\sin t$.

6. Найти методом Эйлера общее решение линейной системы

$$\left.\begin{aligned} y' &= y+z, \\ z' &= -2y+4z, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющей начальным условиям: $y=0$, $z=-1$ при $x=0$.

Отв. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; $y=e^{2x}-e^{3x}$;
$z=C_1e^{2x}+2C_2e^{3x}$; $z=e^{2x}-2e^{3x}$.

Найти методом вариации произвольных постоянных общее решение неоднородной линейной системы:

7. $\left.\begin{aligned} y' &= 2y-z+2e^x, \\ z' &= 3y-2z+4e^x. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=Ce^x+C_2e^{-x}+xe^x$,
$z=C_1e^x+3C_2e^{-x}+(x+1)e^x$.

8. $\left.\begin{aligned} y' &= -y+z-2e^{-x}, \\ z' &= -6y+4z-4e^{-x}. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{-x}$,
$z=2C_1e^x+3C_2e^{2x}+2e^{-x}$.

9. $\left.\begin{aligned} y' &= 2y-z-\sin x, \\ z' &= 3y-2z-\cos x. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\sin x$,
$z=C_1e^x+3C_2e^{-x}+\sin x-\cos x$.

Проинтегрировать методом Даламбера системы линейных дифференциальных уравнений:

10. $\left.\begin{aligned} y' &= 2y-9z, \\ z' &= y+8z. \end{aligned}\right\}$

Отв. $(y+3z)\,e^{-5x}=C_1$,
$[(y+3z)\,x-z]\,e^{-5x}=C_2$.

11. $\left.\begin{aligned} y' &= 5y+4z+e^x, \\ z' &= 4y+5z+1. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y+z=C_1e^{9x}-\frac{1}{8}e^x-\frac{1}{9}$,
$y-z=C_2e^x+x+e^{-x}$.

12. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y+z, \\ \frac{dy}{dt} &= z+x, \\ \frac{dz}{dt} &= x+y. \end{aligned}\right\}$

Отв. $x+y+z=C_1e^{2t}$,
$x-y=C_2e^{-t}$,
$x-z=C_3e^{-t}$.

13. В результате химической реакции вещество C разлагается на два вещества x и y. Скорость образования каждого из продуктов разложения пропорциональна наличному количеству вещества C. Найти зависимость x и y от времени, если

в начале процесса $C=1$, $x=0$, $y=0$, а по истечении 1 часа $C=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{8}$, $y=\frac{3}{8}$.

Отв. $x=\frac{1}{4}(1-2^{-t})$, $y=\frac{3}{4}(1-2^{-t})$.

14. В результате химической реакции вещество x превращается в вещество y со скоростью, пропорциональной наличному количеству вещества x. Одновременно образовавшееся вещество y (происходит обратная реакция) переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной наличному количеству y. Химический анализ дал такие результаты: при $t=0$; 3; ∞ количество вещества x соответственно равно 10; 6; 5,5, а количество вещества y соответственно равно 0; 4; 4,5. Найти законы зависимости x и y от времени t.

Отв. $y=4{,}5\,(1-e^{-0{,}7324t})$, $x=10-y$.

15. Распад радиевых веществ происходит со скоростью, пропорциональной наличному количеству данного вещества. Вещество RaB превращается в вещество RaC, причем половина наличного количества вещества RaB оказывается преобразованной по истечении 27 мин. В свою очередь половина данного количества вещества RaC превращается в другое вещество в течение 19,5 мин. Принимая первоначальное количество вещества RaB за единицу, найти, какое количество веществ RaB и RaC будет в наличии через 1 час.

Отв. RaB $=0{,}124$, RaC $=0{,}249$.

§ 7. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Основные понятия теории матриц

Квадратной матрицей n-го порядка называется квадратная таблица, составленная из элементов a_{ik} (чисел или функций), где i, $k=1, 2, \ldots, n$, расположенных в определенном порядке. Квадратная матрица n-го порядка имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если $i \neq k$, т. е. число строк не равно числу столбцов, то матрица называется *прямоугольной* размера $i \times k$. Порядок расположения элементов матрицы обозначается двумя индексами (первый указывает на номер строки, второй — на номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент матрицы). Так, например, элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца, обозначается символом $(A)_{ik}$, так что

$$(A)_{ik}=a_{ik}.$$

Для обозначения матриц используют заглавные буквы латинского алфавита или высокие квадратные скобки, внутри которых записываются подробно все элементы матрицы.

Если матрица A состоит из одного столбца, то такая матрица называется *матрицей-столбцом* и имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Второй индекс у элементов матрицы-столбца опускается.

Если в матрице A одна строка, то такая матрица называется *матрицей-строкой* и обозначается

$$A=\{a_1\, a_2 \ldots a_n\}.$$

В матрице-строке опускается первый индекс у ее элементов.

Матрица, все элементы которой нули, называется *нулевой* и имеет вид

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы, у которых совпадают два индекса, образует *главную диагональ* матрицы A.

Сумма элементов главной диагонали матрицы A называется *следом* этой матрицы и записывается так:

$$\mathrm{Sp}\,(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Квадратная матрица, у которой элементы, имеющие неодинаковые индексы (т. е. не стоящие на главной диагонали) равны нулю, имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]$$

и называется *диагональной*.

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой одинаковы, называется *скалярной* матрицей:

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}.$$

Если в скалярной матрице элемент a равен единице, то она принимает вид

$$E=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

и называется *единичной* матрицей.

Единичная матрица в алгебре матриц играет роль, до некоторой степени аналогичную роли единицы в простых арифметических операциях.

Если матрица A порядка n имеет вид

$$A=\begin{vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{vmatrix},$$

где A_1, A_2, ..., A_r — недиагональные квадратные матрицы порядков m_1, m_2, ..., m_r соответственно (причем $m_1+m_2+m_3+\dots+m_r=n$), главные диагонали которых составляют главную диагональ всей матрицы A, а все элементы, не принадлежащие матрицам A_1, A_2, ..., A_r, равны нулю, то матрица A называется *квазидиагональной* матрицей и записывается так:

$$A=[A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_r].$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, при таком же их расположении, как и в последней, называется *определителем матрицы*.

Матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель

$$D(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

Матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, т. е.

$$D(A)\neq 0.$$

II. Алгебраические операции над матрицами

Две матрицы одинакового порядка A и B называются *равными*, если равны их соответствующие элементы:

$$A = B \text{ при условии } (A)_{ik} = (B)_{ik},$$

или

$$a_{ik} = b_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Складывать или вычитать можно лишь матрицы, имеющие одинаковое число строк и столбцов.

Суммой $A + B$ матриц A и B называется такая матрица C, все элементы которой являются суммами соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B \text{ при условии } (C)_{ik} = (A)_{ik} + (B)_{ik},$$

или

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Сумму матриц понимают в алгебраическом смысле.

Если

$$A - B = C,$$

то

$$c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}.$$

Пример 1. Сложить матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение. Имеем

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+(-6) \\ -3+7 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Понятие суммы матриц распространяется на любое число матриц. Сумма матриц подчиняется следующим законам:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$A + O = A.$$

Произведением матрицы A на скаляр λ называется матрица B, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на скаляр λ: $b_{ik} = a_{ik}\lambda$. Таким образом,

$$A\lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda & \ldots & a_{1n}\lambda \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \ldots & a_{2n}\lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \ldots & a_{nn}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} = B.$$

Произведение матриц на скаляр (число) подчиняется следующим законам:

$$(\lambda+\mu)\,A=\lambda A+\mu B,$$
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$

где λ и μ — скаляры.

Пример 2. Найти произведение матрицы $A=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 5 & 11\end{bmatrix}$ на число 4.

Решение. Имеем

$$4A=\begin{bmatrix}4\cdot(-4) & 4\cdot 7\\ 4\cdot 5 & 4\cdot 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & 28\\ 20 & 44\end{bmatrix}.$$

Произведением $A\cdot B$ матриц A и B называют такую матрицу C, каждый элемент которой является суммой произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы:

$$C=A\cdot B \text{ при условии } (C)_{ik}=\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}\cdot(B)_{lk},$$

или

$$c_{ik}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lk}\quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Перемножить можно не всякие матрицы, а только такие, в которых число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя.

Переставлять местами сомножители нельзя, так как произведение матриц может зависеть от порядка сомножителей, т. е. в общем случае

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

В некоторых случаях имеет место равенство $A\cdot B=B\cdot A$. Такие матрицы A и B называются *коммутативными* (*перестановочными*). Например, не зависят от порядка сомножителей произведение двух диагональных матриц, произведение матрицы на число, произведение матрицы на единичную матрицу:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & & 0\\ & a_{12} & \\ & & \ddots\\ 0 & & a_{1n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & & 0\\ & b_{12} & \\ & & \ddots\\ 0 & & b_{1n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & & 0\\ & b_{12} & \\ & & \ddots\\ 0 & & b_{1n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & & 0\\ & a_{12} & \\ & & \ddots\\ 0 & & a_{1n}\end{bmatrix};$$

$$\lambda\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\lambda;\quad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}.$$

Как видно из последнего равенства, умножение матрицы на единичную матрицу того же порядка не изменяет результата, т. е.

$$A\cdot E=E\cdot A=A.$$

Произведение матриц подчиняется следующим законам:

$$(AB)D = A(BD),$$
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$
$$(A+B)C = AC + BC,$$
$$C(A+B) = CA + CB.$$

Пример 3. Найти произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + & 3\cdot 4 + 7\cdot 5 & 1\cdot 0 + & 3\cdot 1 + 7\cdot 6 & 1\cdot 3 + & 3\cdot 8 + 7\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + & 6\cdot 4 + 1\cdot 5 & 4\cdot 0 + & 6\cdot 1 + 1\cdot 6 & 4\cdot 3 + & 6\cdot 8 + 1\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 2\cdot 5 & & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 6 & & 0\cdot 3 + (-1)\cdot 8 + 2\cdot 3 & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 45 & 48 \\ 33 & 12 & 63 \\ 6 & 11 & -2 \end{bmatrix}.$$

Для квадратной матрицы существует действие *возведения в степень*:

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ множителей}}.$$

При этом

$$A^2 = A \cdot A,$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2,$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Любая целая положительная степень m матрицы определяется равенством

$$A^m = A^{m-1} \cdot A \qquad (m \geqslant 2).$$

Если $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — диагональная матрица, то

$$A^m = [a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m].$$

Пример 4. Найти A^2, если $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}$.

Решение. Имеем

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot3+0\cdot0+0\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+0\cdot5\\0\cdot3+4\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot0+4\cdot4+0\cdot0 & 0\cdot0+4\cdot0+0\cdot5\\0\cdot3+0\cdot0+5\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot4+5\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0+5\cdot5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3^2&0&0\\0&4^2&0\\0&0&5^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&16&0\\0&0&25\end{bmatrix}.$$

Аналогично вычисляется степень квазидиагональных матриц. Если $A=[A_1, A_2, \ldots, A_r]$, то $A^m=[A_1^m, A_2^m, \ldots, A_r^m]$.

Под нулевой степенью матрицы A понимается единичная матрица того же порядка

$$A^0=E.$$

Введем понятие обратной матрицы. Для этого рассмотрим простейший случай — систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2&=b_1,\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2&=b_2.\end{aligned}\right\}\qquad(3.77)$$

Решая систему относительно этих неизвестных, имеем

$$x_1=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\cdot b_1-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\cdot b_2,$$

$$x_2=-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\cdot b_1+\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\cdot b_2,$$

или

$$\left.\begin{aligned}x_1&=a_{11}b_1+a_{12}b_2,\\ x_2&=a_{21}b_1+a_{22}b_2,\end{aligned}\right\}\qquad(3.78)$$

где

$$a_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}},\qquad a_{12}=-\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}},$$

$$a_{21}=-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}},\qquad a_{22}=\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

Аналогично получаем решение относительно x_i при числе неизвестных большем, чем два. Коэффициенты a_{ik} в последней системе образуют матрицу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

которая называется *обратной* по отношению к первоначальной матрице, составленной из коэффициентов системы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

и обозначается символом A^{-1}.

Таким образом, если представить систему (3.77) в виде матричного уравнения

$$AX = B,$$

где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ — матрицы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных и свободных членов, то решение этого матричного уравнения относительно x можно представить в виде

$$X = A^{-1}B,$$

где матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ является обратной по отношению к исходной.

Если вместо матрицы B подставить ее значение AX, то получим равенство

$$X = A^{-1}AX,$$

которое возможно, если

$$A^{-1}A = E,$$

или, в условной записи,

$$A^{-1} = \frac{E}{A};$$

Последнее равенство оправдывает название обратной матрицы.

Итак, матрицу, являющуюся решением уравнения

$$AX = E,$$

называют *обратной матрицей* по отношению к матрице A и обозначают A^{-1}. Обратная матрица является коммутирующей (переставновочной) матрицей, т. е.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обратная матрица A^{-1} для квадратной матрицы A существует только тогда, если матрица A является *невырожденной*, т. е. если ее определитель отличен от нуля.

Если A и B невырожденные матрицы, то матрица, обратная их произведению равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Целая отрицательная степень обратной матрицы

$$A^{-m} = (A^{-1})^m.$$

Если в матрице

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

поменять местами строки и столбцы, то получим матрицу A^{τ}, которая называется *транспонированной матрицей* по отношению к матрице A:

$$A^{\tau} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица является транспонированной по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A перестановкой строк и столбцов.

Пример 5. Если матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 63 \end{bmatrix}$, то транспонированной матрицей является матрица

$$A^{\tau} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 63 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, зависимость между элементами транспонированной и данной матриц такова:

$$(A^{\tau})_{ik} = (A)_{ki}.$$

Операция транспонирования произведения двух матриц A и B подчиняется закону

$$(AB)^{\tau} = B^{\tau}A^{\tau}.$$

Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

называется *характеристической матрицей* соответствующей матрицы A.

Определитель

$$D(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

называется *характеристическим определителем* матрицы A, уравнение

$$D(A-\lambda E)=0$$

— *характеристическим уравнением*, а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — *характеристическими числами* матрицы A.

Пусть λ_1 — характеристическое число кратности k, т. е. кратный корень уравнения $D(A-\lambda E)=0$. Поскольку число λ_1 является корнем последнего уравнения, то выражения

$$(\lambda-\lambda_1)^{l_1},\ (\lambda-\lambda_1)^{l_2},\ \dots,\ (\lambda-\lambda_1)^{l_{m+1}},$$

где $l_1=k-k_1, l_2=k_1-k_2, \dots, l_m=k_{m-1}-k_m, l_{m+1}=k_m$, причем k_i $(i=1, 2, \dots, m)$ — показатели степени общего наибольшего делителя $(\lambda-\lambda_1)^{k_i}$ всех определителей $(n-i)$-го порядка, получающихся из характеристического определителя последовательным вычеркиванием i строк и i столбцов, очевидно, являются делителями определителя $D(A-\lambda E)$. Эти выражения называются *элементарными делителями* матрицы A, соответствующими характеристическому числу λ_1. Сумма показателей всех элементарных делителей $l_1+l_2+\dots+l_{m+1}$ равна кратности k характеристического числа.

Если любой из показателей степени $l_i=1$, то соответствующий ему делитель $\lambda-\lambda_1$ называется *простым*. Если же показатель $l_i>1$, то элементарный делитель $(\lambda-\lambda_1)^{l_i}$ называется *непростым*.

Определив элементарные делители, соответствующие всем характеристическим числам матрицы A, получим совокупность всех элементарных делителей этой матрицы:

$$(\lambda-\lambda_1)^{h_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{h_2},\ \dots,\ (\lambda-\lambda_r)^{h_r},$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_r$ — целые числа (причем $1 \leqslant h_i \leqslant n$), а их сумма равна порядку матрицы A, т. е. $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = n$.

Рассмотрим квазидиагональную матрицу

$$[I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r)], \qquad (*)$$

в которой под $I_1(\lambda_m)$ понимается число λ_m. Эта матрица имеет те же элементарные делители, что и матрица A.

Матрица (*) называется *канонической матрицей*, соответствующей матрице A. Если все элементарные делители $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, ..., $\lambda - \lambda_n$ матрицы A простые, то матрица (*) обращается в диагональную матрицу $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r]$. Всякая матрица A может быть приведена к каноническому виду. Две матрицы A и B называются *подобными*, если они связаны соотношением

$$B = VAV^{-1},$$

где V — некоторая невырожденная матрица.

Преобразование, с помощью которого из матрицы A получается матрица B называется *преобразованием подобия с матрицей подобия* V. Преобразование подобия дает возможность привести матрицу к наиболее простому каноническому виду.

Теорема. *Если матрица A имеет элементарные делители*

$$(\lambda - \lambda_1)^{h_1}, (\lambda - \lambda_2)^{h_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_r)^{h_r},$$

где $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = n$, то существует такая невырожденная матрица V, что

$$VAV^{-1} = [I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r)],$$

где $I_1(\lambda_m) = \lambda_m$. Это выражение дает каноническое представление матрицы A, а квазидиагональная матрица $[I_{h_1}(\lambda_1), I_{h_2}(\lambda_2), \ldots, I_{h_r}(\lambda_r)]$ представляет каноническйй вид матрицы A.

В частном случае, если все элементарные делители матрицы A простые, то каноническим видом матрицы A является диагональная матрица $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, а каноническим представлением матрицы A:

$$V[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]V^{-1}.$$

(Доказательство теоремы опускаем.)

III. Элементы матричного анализа

Дифференцирование матрицы Z сводится к дифференцированию всех ее элементов:

$$\frac{dZ}{dx} = \left[\frac{dz_{ik}}{dx}\right].$$

Правила дифференцирования функций остаются справедливыми при дифференцировании матриц. Если A постоянная матрица, то

$$\frac{dA}{dx}=0,\quad \frac{d(AZ)}{dx}=A\frac{dZ}{dx},\quad \frac{d(\lambda Z)}{dx}=\lambda\frac{dZ}{dx},$$

$$\frac{d(Z_1+Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dx},\quad \frac{d(Z_1Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}Z_2+Z_1\frac{dZ_2}{dx}.$$

В последнем равенстве перестановка сомножителей недопустима

$$\frac{dZ^m}{dx}=\sum_{k=0}^{m-1}Z^k\frac{dZ}{dx}Z^{m-k-1}.$$

Интегрирование матриц определяется как операция, обратная дифференцированию

$$\int Z(x)\,dx=\left[\int z_{ik}(x)\,dx\right].$$

Основные зависимости следующие:

$$\int_{x_0}^{x}A\,dx=A(x-x_0),$$

$$\int_{x_0}^{x}AZ(x)\,dx=A\int_{x_0}^{x}Z(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x}[Z_1(x)+Z_2(x)]\,dx=\int_{x_0}^{x}Z_1(x)\,dx+\int_{x_0}^{x}Z_2(x)\,dx.$$

Запишем степенной ряд от матрицы Z:

$$a_0+a_1Z+a_2Z^2+a_3Z^3+\ldots+a_kZ^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kZ^k,$$

где Z — матрица n-го порядка; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ — действительные или комплексные числа.

Экспоненциальная функция от матрицы Z имеет вид

$$e^Z=E+Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\ldots+\frac{Z^k}{k!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z^k}{k!}.$$

Производная от функции e^Z:

$$\frac{d(e^Z)}{dx}=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{dZ^k}{dx}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}Z^i\frac{dZ}{dx}Z^{k-i-1}.$$

Если матрица Z перестановочна со своей производной, т. е.

$$Z\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z,$$

то

$$\frac{d(e^Z)}{dx}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z^{k-1}}{(k-1)!}\frac{dZ}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z^k}{k!}\frac{dZ}{dx}=e^Z\frac{dZ}{dx}.$$

В частном случае, если $Z=Ax$, где A — постоянная матрица, имеем

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx}=e^{Ax}\,A=Ae^{Ax}.$$

IV. Матричный метод интегрирования линейных систем

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{n1}y_n,\\
\frac{dy_2}{dx}&=a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{n2}y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx}&=a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{nn}y_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.79)$$

В системе (3.79) для удобства последующих выкладок изменяется порядок индексов у постоянных коэффициентов. Первый индекс (l) коэффициента a_{lk} означает номер исключаемой функции y_l ($l=1, 2, \ldots, n$), второй индекс (k) — номер уравнения. Запишем систему (3.79) в сокращенном виде:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}a_{lk}y_l\quad(k=1, 2, \ldots, n).\qquad(3.79')$$

Фундаментальную систему решений системы (3.79) можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{aligned}
&y_{11}(x),\ y_{12}(x),\ \ldots,\ y_{1n}(x)\ \text{(первое решение)},\\
&y_{21}(x),\ y_{22}(x),\ \ldots,\ y_{2n}(x)\ \text{(второе решение)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{n1}(x),\ y_{n2}(x),\ \ldots,\ y_{nn}(x)\ (n\text{-е решение}),
\end{aligned}\qquad(3.80)$$

где каждая фуикция определена и непрерывна в интервале (a, b). Таблицу (3.80) следует рассматривать как единое целое, не переставляя входящих в нее функций. Здесь первый индекс означает номер строки (номер решения), а второй индекс — номер столбца (номер функции). В сокращенной записи фундаментальная система имеет вид

$$y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{in}\quad(i=1, 2, \ldots, n).\qquad(3.80')$$

Поскольку решения (3.80) должны удовлетворять системе (3.79), то, подставляя их последовательно в эту систему, получим: в результате подстановки первого решения $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{11}}{dx} &\equiv a_{11}y_{11} + a_{21}y_{12} + \ldots + a_{n1}y_{1n}, \\ \frac{dy_{12}}{dx} &\equiv a_{12}y_{11} + a_{22}y_{12} + \ldots + a_{n2}y_{1n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_{1n}}{dx} &\equiv a_{1n}y_{11} + a_{2n}y_{12} + \ldots + a_{nn}y_{1n}; \end{aligned}\right\} \qquad (3.81')$$

в результате подстановки второго решения $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{21}}{dx} &\equiv a_{11}y_{21} + a_{21}y_{22} + \ldots + a_{n1}y_{2n}, \\ \frac{dy_{22}}{dx} &\equiv a_{12}y_{21} + a_{22}y_{22} + \ldots + a_{n2}y_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_{2n}}{dx} &\equiv a_{1n}y_{21} + a_{2n}y_{22} + \ldots + a_{nn}y_{2n}; \end{aligned}\right\} \qquad (3.81'')$$

. . . . . .

в результате подстановки n-го решения $y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_{n1}}{dx} &\equiv a_{11}y_{n1} + a_{21}y_{n2} + \ldots + a_{n1}y_{nn}, \\ \frac{dy_{n2}}{dx} &\equiv a_{12}y_{n1} + a_{22}y_{n2} + \ldots + a_{n2}y_{nn}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_{nn}}{dx} &\equiv a_{1n}y_{n1} + a_{2n}y_{n2} + \ldots + a_{nn}y_{nn}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.81''')$$

Так как первая подстановка (3.81′) состоит из n тождеств, вторая подстановка (3.81″) — из n тождеств, ..., n-я подстановка (3.81‴) также состоит из n тождеств, то в итоге всех n последовательных подстановок фундаментальной системы решений в систему линейных дифференциальных уравнений (3.79) получим $n \cdot n = n^2$ тождеств, которые можно записать в сокращенном виде

$$\frac{dy_{ik}}{dx} \equiv \sum_{l=1}^{n} a_{lk}y_{il}, \text{ где } i, k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.80'')$$

Поставим перед собой задачу заменить эти n^2 тождеств одним матричным уравнением. Для этого введем матрицы

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad Y(x) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (3.82)$$

где $Y(x)$ — матрица фундаментальной системы решений системы (3.79); A^{τ} — транспонированная матрица коэффициентов этой системы. Здесь исходная матрица коэффициентов

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда члены тождеств (3.80′) в матричной форме записываются:

$$\frac{dy_{ik}}{dx}=\left(\frac{dY}{dx}\right)_{ik}, \tag{3.83}$$

где правая часть есть иная символическая форма записи элемента y_{ik} матрицы Y, стоящего на пересечении i-й строки и k-го столбца;

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lk}y_{il}=\sum_{l=1}^{n}(A^{\tau})_{lk}(Y)_{il} \quad (i, k=1, 2, \dots, n), \tag{3.84}$$

где символ $(A^{\tau})_{lk}$ — матричная форма записи элемента a_{lk}, находящегося на пересечении l-й строки и k-го столбца, а $(Y)_{il}$ — матричная форма записи элемента y_{il}, находящегося на пересечении i-й строки и l-го столбца.

Таким образом, с помощью других символических обозначений элементов, на основании равенств (3.82) и (3.83), тождества (3.80) можно записать в виде

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_{ik}=\sum_{l=1}^{n}(A^{\tau})_{lk}(Y)_{il}. \tag{3.85}$$

Правая часть соотношений (3.85) есть сумма произведений элементов, которая не зависит от порядка слагаемых отдельных членов и поэтому может быть записана в виде

$$\sum_{l=1}^{n}(A^{\tau})_{lk}(Y)_{il}=\sum_{l=1}^{n}(Y)_{il}(A^{\tau})_{lk}. \tag{3.86}$$

Как следует из определения произведения двух матриц сумма произведений элементов i-й строки матрицы Y на соответствующие элементы k-го столбца матрицы A^{τ} [причем число l столбцов первого сомножителя (матрицы Y) и число l строк второго сомножителя (матрицы A^{τ}) совпадают] равна элементу матрицы произведения YP с индексами ik. Поэтому правую часть равенства (3.86) можно представить в виде

$$\sum_{l=1}^{n}(Y)_{il}(A^{\tau})_{lk}=(YA^{\tau})_{ik}, \tag{3.87}$$

следовательно, тождества (3.80′) принимают вид

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_{ik}\equiv(YA^{\tau})_{ik}. \tag{3.88}$$

Из определения равенства двух матриц следует, что, если равны их соответствующие элементы, то равны и матрицы. Поэтому из равенства элементов $\left(\frac{dY}{dx}\right)_{ik}$ и $(YA^{\tau})_{ik}$ следует равенство соответствующих матриц $\frac{dY}{dx}$ и YA^{τ}, т. е. тождества (3.88) можно представить как одно матричное тождество

$$\frac{dY}{dx} \equiv YA^{\tau}. \tag{3.89}$$

Таким образом, матрица фундаментальной системы решений Y системы (3.79) является решением матричного уравнения

$$\frac{dY}{dx} = YA^{\tau}, \tag{3.90}$$

так как матрица Y обращает уравнение (3.90), соответствующее системе (3.79), в тождество (3.89). (Здесь $Y = Y(x)$ — неизвестная матрица, A^{τ} — заданная матрица).

Невырожденная непрерывно дифференцируемая матрица $Y = Y(x)$, обращающая матричное уравнение (3.90) в тождество

$$\frac{dY(x)}{dx} \equiv Y(x)\,A^{\tau}$$

называется *решением* или *интегральной матрицей* уравнения (3.90) в интервале (a, b), если определитель матрицы $D(Y) \neq 0$ для всех значений x данного интервала.

Приведем основное свойство интегральной матрицы: если Y_1 есть интегральная матрица уравнения (3.90), то матрица

$$Y = CY_1, \tag{3.91}$$

где C — произвольная постоянная невырожденная матрица также является интегральной матрицей этого уравнения. Действительно, дифференцируя правую часть матричного равенства (3.91), имеем

$$\frac{d(CY_1)}{dx} = C\frac{dY_1}{dx}.$$

Согласно тождеству (3.89)

$$\frac{dY_1}{dx} \equiv Y_1A^{\tau},$$

поэтому

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv CY_1A^{\tau},$$

или

$$\frac{d(CY_1)}{dx} \equiv (CY_1)\,A^{\tau}.$$

В то же время определитель

$$D(CY_1) = D(C)\cdot D(Y_1) \neq 0,$$

следовательно, $Y=CY_1$ также есть интегральная матрица уравнения (3.90), что и требовалось доказать.

Итак, общее решение системы (3.79) в матричной форме имеет вид

$$Y=Ce^{Ax}, \tag{3.92}$$

где C — произвольная постоянная невырожденная матрица.

Задача построения интегральной матрицы в случае, если матрица A^{τ} постоянна, решается легко. Поэтому однородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами всегда можно проинтегрировать матричным методом, так как находится сразу вся фундаментальная система решений, которой является интегральная матрица соответствующего матричного уравнения (3.90). Так как матрица A^{τ} постоянна, то она перестановочна со своим интегралом, т. е. заведомо выполняется условие

$$A^{\tau}\cdot\int_{x_0}^{x}A^{\tau}\,dx=\int_{x_0}^{x}A^{\tau}\,dx\cdot A^{\tau}. \tag{3.93}$$

В этом случае в качестве интегральной матрицы уравнения (3.90) можно взять

$$Y_1=e^{\int_{x_0}^{x}A^{\tau}\,dx}=e^{A^{\tau}\int_{x_0}^{x}dx}=e^{A^{\tau}(x-x_0)}. \tag{3.94}$$

Полагая $x_0=0$, получаем

$$Y_1=e^{A^{\tau}x}. \tag{3.95}$$

Здесь в правой части равенства имеем экспоненциальную функцию от матрицы A^{τ}, которая определяется так:

$$e^{A^{\tau}}=E+A^{\tau}+\frac{A^{\tau 2}}{2!}+\ldots+\frac{A^{\tau m}}{m!}+\ldots, \tag{3.96}$$

где E — единичная матрица одинакового порядка с матрицей A^{τ}. Действительно, поскольку

$$\frac{dY_1}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{A^{\tau}x}\right)=A^{\tau}e^{A^{\tau}x},$$

то подставляя полученное соотношение и равенство (3.95) в матричное уравнение (3.90), имеем

$$A^{\tau}e^{A^{\tau}x}=e^{A^{\tau}x}A^{\tau},$$

т. е. матрица (3.95) является интегральной матрицей уравнения (3.90).

Интегральная матрица Y, обращающаяся в единичную матрицу в точке $x=x_0$ внутри интервала (a, b), т. е. интегральная матрица,

удовлетворяющая начальному условию $Y(x_0)=I$, называется *нормированной* в точке $x=x_0$.

Интегральная матрица (3.95) уравнения (3.90) или фундаментальная система решений системы (3.79) нормирована в точке $x=x_0=0$.

Исследуем структуру интегральной матрицы $Y_1=e^{A^{\mathrm{T}}x}$ и покажем, что она определяется элементарными делителями матрицы A^{T}.

Случай 1. *Матрица A^{T} — каноническая диагональная.* Пусть матрица A^{T} экспоненциальной функции (3.95) является канонической диагональной:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}=[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n]$$

и ее простые элементарные делители $\lambda-\lambda_1$, $\lambda-\lambda_2$, ..., $\lambda-\lambda_n$ соответствуют всем характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A^{T}, причем среди этих чисел могут быть равные. Тогда интегральная матрица (3.95) принимает вид

$$Y_1=e^{A^{\mathrm{T}}x}=e^{[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n]x}=e^{[\lambda_1x,\ \lambda_2x,\ \dots,\ \lambda_nx]}.$$

Если A^{T} диагональная матрица $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, то, так как $[a_1, a_2, \dots, a_n]^m=[a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m]$, используя экспоненциальный ряд (3.96), последнее выражение в развернутом виде записывается:

$$e^{[\lambda_1x,\ \lambda_2x,\ \dots,\ \lambda_nx]}=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda_1x&0&\dots&0\\0&\lambda_2x&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\lambda_nx\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\lambda_1x&0&\dots&0\\0&\lambda_2x&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\lambda_nx\end{bmatrix}^2+\dots$$

$$\dots=\begin{bmatrix}1+\lambda_1x+\frac{\lambda_1^2}{2!}x^2+\dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1+\lambda_2x+\frac{\lambda_2^2}{2!}x^2+\dots & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1+\lambda_nx+\frac{\lambda_n^2}{2!}+\dots\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1x}&0&\dots&0\\0&e^{\lambda_2x}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&e^{\lambda_nx}\end{bmatrix}=[e^{\lambda_1x},\ e^{\lambda_2x},\ \dots,\ e^{\lambda_nx}],$$

т. е. экспоненциальная функция от диагональной матрицы есть диагональная матрица, диагональными элементами которой являются соответствующие экспоненциальные функции. Итак,

$$Y_1 = [e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x}]. \tag{3.97}$$

В этом случае интегральная матрица (3.95) является также диагональной матрицей.

Случай 2. *Матрица A^τ — каноническая квазидиагональная.* Пусть матрица A^τ экспоненциальной функции (3.95) является канонической и квазиднагональной:

$$A^\tau = [I_{h_1}(\lambda_1),\ I_{h_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{h_r}(\lambda_r)], \tag{3.98}$$

где

$$I_{h_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

— матрица порядка h, в которой по главной диагонали число λ_i, на нижеследующей диагонали число 1 при всех остальных нулевых элементах, причем $I_1(\lambda_m) = \lambda_m$. В этой матрице сумма показателей всех элементарных делителей равна ее порядку, т. е.

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_r = n.$$

Матрица (3.99) соответствует элементарным делителям

$$(\lambda - \lambda_1)^{h_1},\ (\lambda - \lambda_2)^{h_2},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_r)^{h_r},$$

среди которых имеются непростые. Некоторые из характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ могут быть одинаковые. Здесь $h_1, h_2, \ldots, h_r$ — целые числа, причем $1 \leqslant h_\mu \leqslant n$. Тогда интегральная матрица (3.95) принимает вид

$$Y_1 = e^{A^\tau x} = e^{[I_{h_1}(\lambda_1),\ I_{h_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{h_r}(\lambda_r)]x} = e^{[I_{h_1}(\lambda_1)x,\ I_{h_2}(\lambda_2)x,\ \ldots,\ I_{h_r}(\lambda_r)x]}.$$

Если A^τ квазидиагональная матрица $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$, то, так как

$$[A_1, A_2, \ldots, A_r]^m = [A_1^m, A_2^m, \ldots, A_r^m],$$

используя экспоненциальный ряд (3.96), последнее выражение можно представить в виде

$$e^{\left[I_{h_1}(\lambda_1)x,\ I_{h_2}(\lambda_2)x,\ \ldots,\ I_{h_r}(\lambda_r)x\right]}=\begin{bmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\&\ldots&&\\0&0&&1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}I_{h_1}(\lambda_1)x&0&\ldots&0\\0&I_{h_2}(\lambda_2)x&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&I_{h_r}(\lambda_r)x\end{bmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{bmatrix}I_{h_1}(\lambda_1)x&0&\ldots&0\\0&I_{h_2}(\lambda_2)x&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&I_{h_r}(\lambda_r)x\end{bmatrix}^2+\ldots$$

$$\ldots=\begin{bmatrix}1+I_{h_1}(\lambda_1)x+\\+\frac{1}{2!}I_{h_1}(\lambda_1)x^2+\ldots&0&\ldots&0\\0&1+I_{h_2}(\lambda_2)x+\\&+\frac{1}{2!}I_{h_2}(\lambda_2)x^2+\ldots&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&1+I_{h_r}(\lambda_r)x+\\&&&+\frac{1}{2!}I_{h_r}(\lambda_r)x^2+\ldots\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}e^{I_{h_1}(\lambda_1)x}&0&\ldots&0\\0&e^{I_{h_2}(\lambda_2)x}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&e^{I_{h_r}(\lambda_r)x}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[e^{I_{h_1}(\lambda_1)x},\ e^{I_{h_2}(\lambda_2)x},\ \ldots,\ e^{I_{h_r}(\lambda_r)x}\right].$$

Итак,

$$Y_1=\left[e^{I_{h_1}(\lambda_1)x},\ e^{I_{h_2}(\lambda_2)x},\ \ldots,\ e^{I_{h_r}(\lambda_r)x}\right]. \tag{3.100}$$

В этом случае, интегральная матрица (3.100) является также квазидиагональной.

Вычислим матрицу типа $e^{I_h(\lambda)x}$, которая является основным элементом квазидиагональной матрицы (3.100). Имеем

$$e^{I_h(\lambda)x}=e^{I_h(\lambda+0)x}=e^{I_h(\lambda)x+I_h(0)x}=$$
$$=e^{\lambda x+I_h(0)x}=e^{\lambda x}e^{I_h(0)x}. \tag{3.101}$$

Используя экспоненциальный ряд (3.96), находим значение последнего члена равенства (3.100):

$$e^{I_h(0)x}=E_h+I_h(0)x+\frac{1}{2!}[I_h(0)]^2x^2+\ldots+\frac{1}{m!}[I_m(0)]^m x^m+\ldots, \tag{3.102}$$

где E_h — единичная матрица порядка h. Матрица (3.101) при $\lambda=0$ принимает вид

$$I_h(0)=\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&1&0\end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

Перемножая две матрицы (3.103), получаем третий член матричного разложения (3.102)

$$[I_h(0)]^2=\begin{bmatrix}0&0&0&\dots&0&0&0\\0&0&0&\dots&0&0&0\\1&0&0&\dots&0&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&1&0&0\end{bmatrix}=I_h^2(0). \tag{3.104}$$

Тогда, обобщая зависимость для любой степени $m<h$ этой матрицы, имеем

$$[I_h(0)]^m=I_h^{(m)}(0), \tag{3.105}$$

где

$$I_h^{(m)}(0)=\left\{\begin{bmatrix}0&0&0\dots0&0&0\dots0&0\\0&0&0\dots0&0&0\dots0&0\\\cdot&\cdot&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\0&0&0\dots0&0&0\dots0&0\\1&0&0\dots0&0&0\dots0&0\\0&1&0\dots0&0&0\dots0&0\\\cdot&\cdot&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\0&0&0\dots1&0&\underbrace{\dots0\ 0}_{m}\end{bmatrix}\right\}m. \tag{3.105'}$$

Обозначение степени в скобках (m) указывает количество образуемых при возведении в m-ю степень нулевых строк сверху и нулевых столбцов справа матрицы $[I_h(0)]$.

В общем случае

$$[I_h(0)]^m=\begin{cases}I_h^{(m)}(0) & \text{при } m<h,\\ 0 & \text{при } m\geqslant h.\end{cases}$$

Следовательно, разложение (3.102) при $m<h$ можно записать в виде

$$e^{I_h(0)\,x}=E_h+I_h(0)\,x+\frac{1}{2!}I_h^{(2)}(0)\,x^2+\dots+\frac{1}{(h-1)!}I_h^{h-1}(0)\,x^{h-1}. \tag{3.106}$$

Подставляя в ряд (3.106) развернутые значения отдельных матриц и их степеней и суммируя затем элементы полученных матриц, имеем

$$e^{I_h^{(0)}x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} & \frac{x^{h-2}}{(h-2)!} & \frac{x^{h-3}}{(h-3)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3.107)$$

Учитывая соотношение (3.101) (умножая таким образом правую часть равенства (3.107) на $e^{\lambda x}$), окончательно получаем

$$e^{I_h^{(\lambda)}x}=\begin{bmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{h-1}}{(h-1)!}e^{\lambda x} & \frac{x^{h-2}}{(h-2)!}e^{\lambda x} & \frac{x^{h-3}}{(h-3)!}e^{\lambda x} & \dots & \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} \end{bmatrix}. \qquad (3.108)$$

Следовательно, элементы интегральной матрицы (3.95) есть степенные ряды по степеням x, которые сходятся при всех значениях x. Эти ряды можно просуммировать; таким образом, интегральная матрица (3.95) состоит из элементарных функций.

В интегральной матрице (3.85) каждому непростому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_\nu)^{h_\nu}$ соответствует h_ν решений, которые получаются из последовательного определения дифференцированием коэффициентов при показательных функциях.

Простому элементарному делителю $\lambda-\lambda_\mu$ соответствует группа, состоящая из одного решения вида

$$0,\ 0,\ \dots,\ e^{\lambda_\mu x},\ 0,\ \dots,\ 0.$$

Общее число таких групп r равно числу элементарных делителей матрицы A^1. Кратному корню может соответствовать одна или несколько групп, но их число не превышает кратности k корня.

Случай 3. *Матрица A^τ — произвольная неканоническая.* Это общий случай, так как если матрица A^τ является неканонической, то ее всегда можно привести к каноническому виду, т. е. свести задачу к рассмотренным случаям 1 или 2.

Приведем матрицу A^τ к каноническому виду с помощью преобразования подобия, т. е. найдем такую вырожденную матрицу V, чтобы матрица

$$B=VA^\tau V^{-1} \qquad (3.109)$$

была канонической. Тогда, применяя к матричному уравнению (3.90) подстановку

$$Y = ZV, \tag{3.110}$$

где Z — новая неизвестная интегральная матрица, получим

$$\frac{d(ZV)}{dx} = \frac{dZ}{dx} V = ZVA^{\tau}.$$

Умножая обе стороны последнего равенства на обратную матрицу V^{-1} и учитывая, что умножение на $VV^{-1} = V^{-1}V = E$ не изменяет результата, имеем

$$\frac{dZ}{dx} = ZVA^{\tau}V^{-1}$$

или, подставляя соотношение (3.109),

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \tag{3.111}$$

где B — каноническая матрица. Полученное присоединенное матричное уравнение (3.111) того же вида, что и матричное уравнение (3.90), но уже с канонической матрицей. Поэтому матричное уравнение (3.111) имеет интегральную матрицу

$$Z_1 = e^{Bx} \tag{3.112}$$

и за интегральную матрицу уравнения (3.90) можно взять тогда, согласно равенству (3.110),

$$Y_1 = e^{Bx}V. \tag{3.113}$$

Система дифференциальных уравнений, соответствующая матричному уравнению (3.111), называется *канонической формой системы* (3.79).

Структура матрицы Y_1 определяется структурой матрицы Z_1, которая определяется элементарными делителями матрицы B, совпадающими с элементарными делителями матрицы A^{τ}. Следовательно, структура матрицы Y_1 определяется элементарными делителями матрицы A^{τ}

Если матрица A^{τ} имеет простые элементарные делители $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, ..., $\lambda - \lambda_n$, то каноническая матрица

$$B = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Поэтому интегральную матрицу уравнения (3.90), учитывая соотношение (3.97), можно записать в виде

$$Y_1 = e^{Bx}V = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}]\, V. \tag{3.114}$$

Пусть

$$V = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица решений (3.114)

$$Y_1 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11}e^{\lambda_1 x} & \beta_{12}e^{\lambda_1 x} & \dots & \beta_{1n}e^{\lambda_1 x} \\ \beta_{21}e^{\lambda_2 x} & \beta_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & \beta_{2n}e^{\lambda_2 x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}e^{\lambda_n x} & \beta_{n2}e^{\lambda_n x} & \dots & \beta_{nn}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в случае простых кратных элементарных делителей фундаментальная система решений имеет структуру, аналогичную случаю действительных различных корней характеристического уравнения и в состав этих решений входят лишь показательные функции с постоянными сомножителями, т. е. общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} &y_{11} = \beta_{11}e^{\lambda_1 x}, \quad y_{12} = \beta_{12}e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_{1n} = \beta_{1n}e^{\lambda_1 x}; \\ &y_{21} = \beta_{21}e^{\lambda_2 x}, \quad y_{22} = \beta_{22}e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_{2n} = \beta_{2n}e^{\lambda_2 x}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_{n1} = \beta_{n1}e^{\lambda_n x}, \quad y_{n2} = \beta_{n2}e^{\lambda_n x} \quad \dots, \quad y_{nn} = \beta_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

Комплексным характеристическим числам будут соответствовать комплексные решения. Однако их можно заменить действительными, отделяя действительные и мнимые части. В результате всегда получится фундаментальная система решений, состоящая из действительных функций.

Если матрица $A^{\text{т}}$ имеет непростые элементарные делители вида $(\lambda-\lambda_1)^{h_1}$, $(\lambda-\lambda_2)^{h_2}$, ..., $(\lambda-\lambda_r)^{h_r}$, причем хотя один из показателей $h_\upsilon > 1$, то каноническая матрица

$$B = \left[I_{h_1}(\lambda_1),\ I_{h_2}(\lambda_2),\ \dots,\ I_{h_r}(\lambda_r)\right].$$

Поэтому интегральную матрицу уравнения (3.90), учитывая соотношение (3.100), можно записать в виде

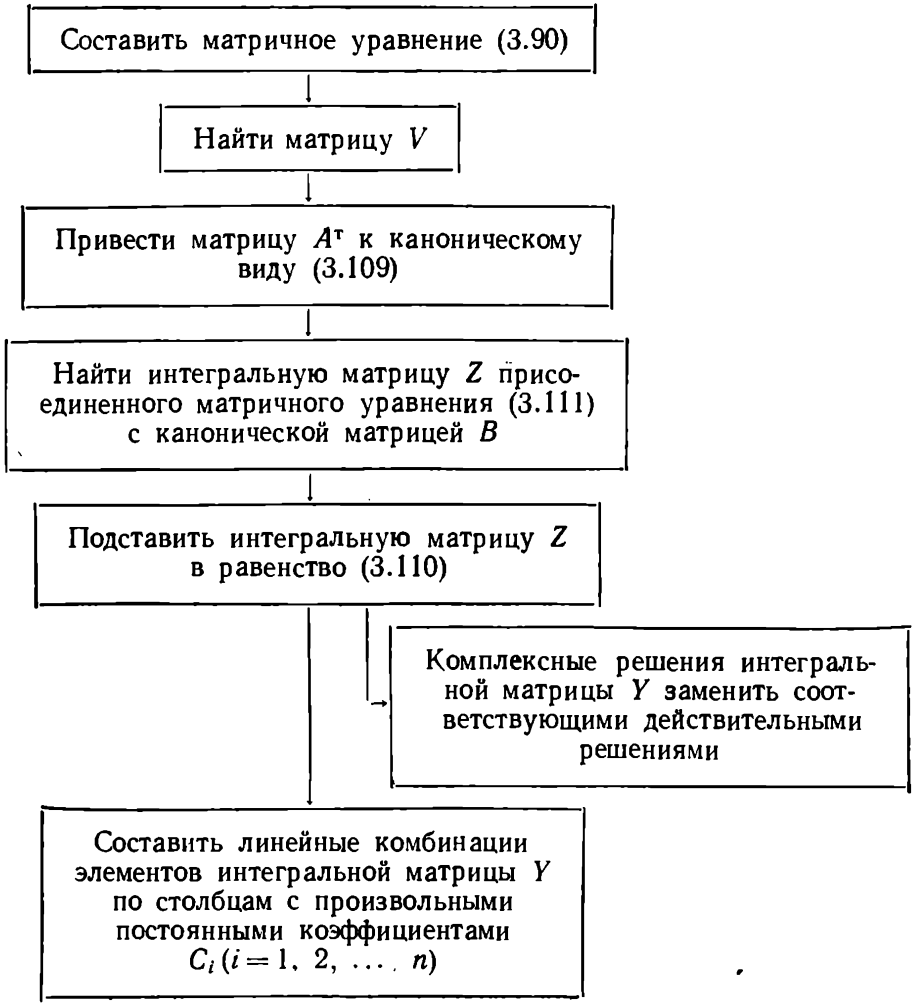
$$Y_1 = e^{Bx}V = \left[e^{I_{h_1}(\lambda_1)x},\ e^{I_{h_2}(\lambda_2)x},\ \dots,\ e^{I_{h_r}(\lambda_r)x}\right] V. \qquad (3.115)$$

Перемножая матрицы, стоящие в правой части равенства (3 115), и учитывая структуру первой из них, не трудно убедиться, что решения, составляющие интегральную матрицу Y_1, разбиваются на r групп, причем каждому элементарному делителю соответствует своя группа решений, содержащих соответственно μ_1, μ_2, ..., μ_r решений.

Действительному корню характеристического уравнения соответствует одна группа решений. Действительному корню кратности k соответствует столько групп, сколько ему соответствует элементарных делителей. Так как сумма показателей всех элементарных делителей, соответствующих данному характеристическому числу, равна его кратности, то ему будет соответствовать k линейно независимых частных решений.

Итак, структура фундаментальной системы решений во всех случаях определяется элементарными делителями матрицы коэффициентов.

Блок-схема интегрирования однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.79) матричным методом приведена ниже.



Пример 6. Найти матричным методом общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - 2y_2, \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Данная система эквивалентна матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = YA^{\mathrm{T}}.$$

Искомая матрица Y имеет вид

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Транспонированная матрица постоянных коэффициентов данной системы

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица A^{T} неканоническая, то приведем ее к каноническому виду. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем

$$(-1-\lambda)(4-\lambda) - 3(-2) = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ действительные и разные. Поэтому каноническая матрица

$$B = [\lambda_1, \ \lambda_2] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу V. Для этого матричное равенство

$$B = VA^{\mathrm{T}}V^{-1}$$

умножим почленно на матрицу V и тогда

$$BV = VA^{\mathrm{T}}V^{-1}V,$$

или, так как $V^{-1}V = E$, то

$$BV = VA^{\mathrm{T}}E.$$

Умножение на единичную матрицу не влияет на результат, поэтому окончательно имеем

$$BV = VA^{\mathrm{T}}.$$

Пусть искомая матрица V имеет вид

$$V=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

где a, b, c, d — неизвестные числовые элементы. Тогда равенство

$$BV=VA^{\mathrm{T}}$$

принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы, имеем

$$\begin{bmatrix} 1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d \\ 0\cdot a+2\cdot c & 0\cdot b+2\cdot d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\cdot(-1)+b\cdot(-2) & a\cdot 3+b\cdot 4 \\ c\cdot(-1)+d\cdot(-2) & c\cdot 3+d\cdot 4 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a-2b & 3a+4b \\ -c-2d & 3c+4d \end{bmatrix}.$$

Если две матрицы равны между собой, то равны и их соответствующие элементы. Таким образом, получаем систему равенств

$$\left.\begin{aligned} a&=-a-2b,\\ b&=\ 3a+4b,\\ 2c&=-c-2d,\\ 2d&=\ 3c+4d. \end{aligned}\right\}$$

Группируя подобные члены, имеем

$$\left.\begin{aligned} 2a&=-2b,\\ -3b&=3a, \end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} 3c&=-2d,\\ -2d&=3c. \end{aligned}\right\}$$

Первые и последние два уравнения являются линейно зависимыми и сводятся к двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned} a&=-b,\\ 3c&=-2d, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим $a=-b$, $c=-\frac{2}{3}d$. Положив $a=1$, $d=3$, получим $b=-1$, $c=-2$. Следовательно, искомая матрица

$$V=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Интегрируя матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ}{dx} = ZB,$$

согласно зависимости (3.97), находим

$$Z = e^{Bx} = e^{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}x} = e^{\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & 2x\end{bmatrix}} = [e^x,\ e^{2x}] = \begin{bmatrix}e^x & 0\\ 0 & e^{2x}\end{bmatrix}.$$

Интегральная матрица уравнения

$$\frac{dY}{dx} = YA^{\mathrm{T}}$$

принимает вид

$$Y = ZV = \begin{bmatrix}e^x & 0\\ 0 & e^{2x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}e^x \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & e^x \cdot (-1) + 0 \cdot 3\\ 0 \cdot 1 + e^{2x} \cdot (-2) & 0 \cdot (-1) + e^{2x} \cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^x & -e^x\\ -2e^{2x} & 3e^{2x}\end{bmatrix}.$$

Составляем линейные комбинации элементов полученной матрицы Y по столбцам (поскольку исходная матрица коэффициентов A^{T} является трансформированной матрицей) с произвольными постоянными коэффициентами. Тогда общее решение данной системы следующее:

$$y_1 = C_1e^x - 2C_2e^{2x}, \quad y_2 = -C_1e^x + 3C_2e^{2x}.$$

Упражнения

Матричным методом проинтегрировать системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2,\\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$,
$y_2 = C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}$.

2. $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2,\\ y_2' &= -4y_1 + 4y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1 + C_2e^{5x}$,
$y_2 = C_1 - 4C_2e^{5x}$.

3. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2,\\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1 + C_2x$,
$y_2 = 2C_1 + C_2(2x - 1)$.

4. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 12y_2 - 4y_3,\\ y_2' &= -y_1 - 3y_2 + y_3,\\ y_3' &= -y_1 - 12y_2 + 6y_3. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = -2C_1e^x - 8C_2e^{2x} - 3C_3e^{3x}$,
$y_2 = C_1e^x + 3C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$,
$y_3 = 2C_1e^x + 7C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$.

5. $\left.\begin{aligned} y_1' &= \frac{11}{3} y_1 - \frac{4}{3} y_2, \\ y_2' &= \frac{4}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = e^x + 2e^{3x}$,
$y_2 = 2e^x + e^{3x}$.

6. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - 2y_2, \\ y_2' &= 21y_1 - 8y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = e^{-x} + 2e^{-2x}$,
$y_2 = 3e^{-x} + 7e^{-2x}$.

7. $\left.\begin{aligned} y_1' &= -26y_1 + 8y_2, \\ y_2' &= -84y_1 + 26y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = e^{-2x} + 2e^{2x}$,
$y_2 = 3e^{-2x} + 7e^{2x}$.

8. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2, \\ y_2' &= 2y_1 + y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{4x}$,
$y_2 = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{4x}$.

9. $\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 5y_2, \\ y_2' &= y_1 - 2y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = 5C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x}$,
$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

10. $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 + 3y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$,
$y_2 = -C_1 e^{2x} - C_2 (1 + x) e^{2x}$.

11. $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;
$y_2 = C_1 (\cos x + \sin x) + C_2 (\sin x - \cos x)$.

ЧАСТЬ II

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА IV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Наряду с задачей Коши для дифференциальных уравнений высших порядков представляют большой интерес краевые задачи, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, а на концах некоторого отрезка $[a, b]$ и ищется решение, определенное внутри этого отрезка. Эти условия называются *краевыми условиями* и состоят в том, что на обоих концах отрезка $[a, b]$ задаются значения искомого решения или значения производных от искомого решения, или (в общем случае) линейная комбинация ординат и производных решения.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным краевым условиям, называется *краевой задачей*. Краевые задачи возможны для дифференциальных уравнений второго и высшего порядков. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \geqslant 2$)

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4.1}$$

Краевая задача формулируется так: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (4.1), для которого значения его производных $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, \sigma_i$) в заданной системе точек $x = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$; $k \geqslant 2$) удовлетворяют n независимым между собой краевым условиям (в общем случае нелинейным):

$$R_\nu\left(y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(\sigma_1 \nu)}, \ldots, y_k, y_k', y_k'', \ldots, y_k^{(\sigma_k \nu)}\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.2}$$

Краевая задача (4.1) — (4.2) для дифференциального уравнения второго порядка формулируется: найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

и принимающую при $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ заданные значения $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$. С геометрической точки зрения это значит, что надо найти интегральную кривую данного дифференциального уравнения, проходящую через заданные точки $M(a;\ y_a)$ и $N(b;\ y_b)$ (рис. 31).

Общая краевая задача (4.1) — (4.2) может:

а) иметь единственное решение;

б) иметь несколько или бесконечно много решений;

в) не иметь решений.

Покажем это на следующих примерах.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''+y=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \text{ при } x=0, \\ y=0 \text{ при } x=\frac{\pi}{2}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

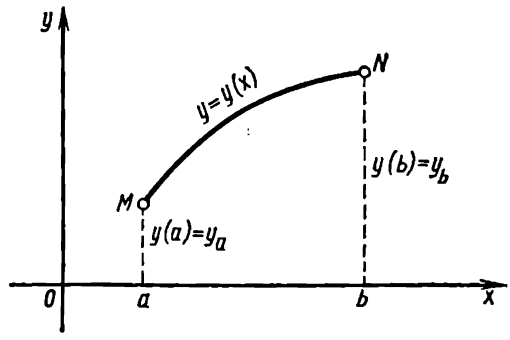


Рис. 31

Решение. Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x. \qquad (3)$$

Подставляя поочередно краевые условия (2) в общее решение (3), находим $C_1=1$, $C_2=0$.

Искомое общее решение

$$y=\cos x \quad \left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 2. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''+y=1$, проходящую через точки $(0;\ 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2};\ -1\right)$.

Решение. Общее решение дифференциального уравнения

$$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x+1.$$

Учитывая краевое условие $y(0)=0$, приходим к уравнению

$$1+C_2=0,$$

а принимая во внимание краевое условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, — к уравнению

$$1+C_1=-1.$$

Решая полученную систему двух алгебраических уравнений, имеем $C_1=-2$ и $C_2=-1$. Решение данной краевой задачи имеет вид

$$y(x)=1-2\sin x-\cos x.$$

Пример 3. Показать, что дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 1$ и $y(\pi) = -1$, имеет бесконечное множество решений.

Решение. Действительно, так как общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

то поскольку краевые условия должны удовлетворять общему решению, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 &= 1, \\ C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi &= 1, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 &= 1, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) &= -1. \end{aligned}\right\}$$

т. е. $C_2 = 1$, $-C_2 = -1$.

Здесь второе уравнение системы является следствием первого. Другими словами, C_1 остается неопределенной величиной, а $C_2 = 1$. Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений вида

$$y = C_1 \sin x + \cos x.$$

Не при всяких краевых условиях существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим условиям.

Пример 4. Показать, что дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0$$

не имеет решения, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 9$.

Решение. Действительно, поскольку общее решение этого дифференциального уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

то для того чтобы удовлетворились заданные краевые условия, необходимо одновременно выполнение системы равенств

$$\left.\begin{aligned} y(0) &\equiv C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ y(2\pi) &\equiv C_1 \cos 2\pi + C_2 \sin 2\pi = 9. \end{aligned}\right\}$$

Однако, эта система противоречива, так как из первого уравнения имеем $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$, откуда $C_1 = 1$, а из второго $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 9$, следовательно, оно выполняется только при $C_1 = 9$.

Итак, нет решения, удовлетворяющего данным краевым условиям.

Пример 5. Определить значения параметра λ, при которых краевая задача

$$y'' + \lambda y = 0,$$

$$y(a) = 0 \quad \text{и} \quad y(a + \pi) = 0$$

имеет одно, более чем одно решение или вообще не имеет решений.

Решение. При $\lambda<0$, общее решение дифференциального уравнения $y''+y=0$ имеет вид

$$y(x)=C_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x.$$

Краевые условия $y(a)=y(a+\pi)=0$ приводят к системе алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных

$$\left.\begin{aligned} C_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}a+C_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}a=0,\\ C_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(a+\pi)+C_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(a+\pi)=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эта система имеет единственное (нулевое) решение $C_1=C_2=0$, если определитель системы

$$D(\lambda)=\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}a\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}(a+\pi)-$$
$$-\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}a\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}(a+\pi)=\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\pi$$

отличен от нуля. Поэтому при $\lambda<0$ данная краевая задача имеет единственное решение

$$y(x)\equiv 0.$$

При $\lambda=0$ общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1+C_2x.$$

Краевые условия $y(a)=y(a+\pi)=0$ приводят в этом случае к системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2a=0,\\ C_1+C_2(a+\pi)=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда $C_1=C_2=0$. Поэтому при $\lambda=0$ данная краевая задача так же имеет решение

$$y(x)\equiv 0.$$

При $\lambda>0$ общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Краевые условия $y(a)=y(a+\pi)=0$ приводят к системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1\cos\sqrt{\lambda}a+C_2\sin\sqrt{\lambda}a=0,\\ C_1\cos\sqrt{\lambda}(a+\pi)+C_2\sin\sqrt{\lambda}(a+\pi)=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определитель этой системы

$$D(\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(a+\pi)-\sin\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}(a+\pi)=\sin\sqrt{\lambda}\pi.$$

Определитель $D(\lambda) \neq 0$, если $\sqrt{\lambda}$ не является целым числом. В этом случае заданное дифференциальное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) \equiv 0.$$

Если $\sqrt{\lambda}$ является целым числом, т. е. λ является одним из чисел 1, 4, 9, 16, 25, ..., например, $\lambda = \lambda_k = k^2$, то тогда $\sin \sqrt{\lambda}(a+\pi)$ и $\cos \sqrt{\lambda}(a+\pi)$ отличаются от $\sin \sqrt{\lambda} a$ и $\cos \sqrt{\lambda} a$ только на множитель $(-1)^k$ и второе уравнение системы (3) аналогично первому уравнению этой системы. Поэтому в этом случае имеется только одно уравнение для определения произвольных постоянных

$$C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = 0. \tag{4}$$

Если принять $C_1 = -A \sin ka$, то $C_2 = A \cos ka$ и общее решение дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

приводится к виду

$$y(x) = A \sin k(x-a),$$

где A — произвольная постоянная.

Итак, данная краевая задача имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда λ не является одним из целых чисел 1, 4, 9, 16, 25, ... Это решение $y(x) \equiv 0$.

Если же $\lambda = \lambda_k = k^2$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то задача имеет бесконечно много решений:

$$y(x) = A \sin k(x-a),$$

где A — произвольная постоянная.

Примеры 1—5 показывают, как решаются краевые задачи в случае, если общее решение дифференциального уравнения может быть найдено непосредственно. Однако это не всегда выполнимо.

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка линейные уравнения занимают особое место. Это объясняется их большей теоретической разработанностью и многочисленными приложениями в технике и физике.

В инженерной практике часто приходится решать дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x) y = f(x), \tag{4.3}$$

отыскивая то его решение, которое на заданном отрезке $[a, b]$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Типичным примером такой задачи служит рассмотренная ранее задача Коши. Характерной особенностью задачи Коши является то обстоятельство, что значения искомой функции $y = y(x)$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно задаются в одной точке $x = x_0$ данного отрезка

(рис. 32). Однако при решении некоторых физических и технических задач появляется необходимость в нахождении решения $y=y(x)$ линейного дифференциального уравнения n-го порядка, если начальные условия заданы в нескольких точках интервала (рис. 33).

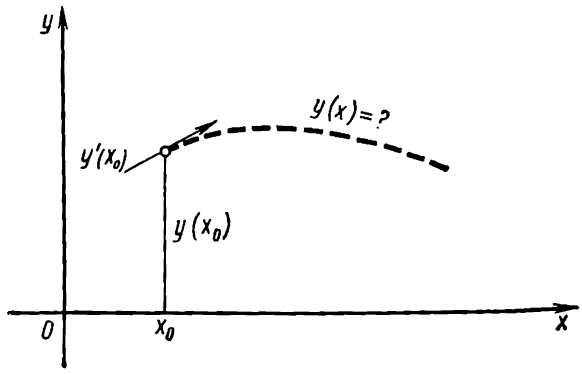


Рис. 32

Краевая задача называется *линейной*, если дифференциальное уравнение и краевые условия линейны. Сокращенно линейное дифференциальное уравнение n-го порядка записывается:

$$L(y)=f(x), \tag{4.4}$$

где

$$L(y)=a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y,$$

причем $a_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и $f(x)$ — известные непрерывные функции на данном отрезке $[a,\ b]$. Для простоты предположим, что

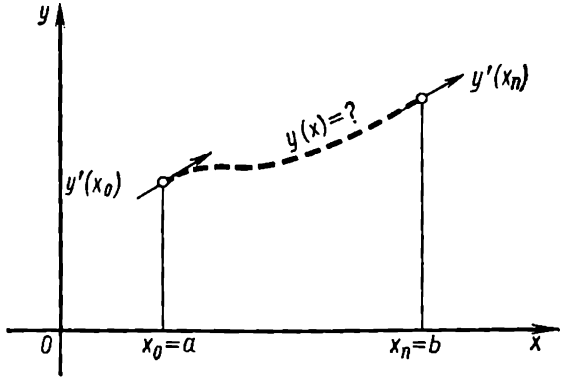


Рис. 33

в краевые условия входят две концевые абсциссы $x_1=a$ и $x_2=b$. Такие краевые условия называются *двухточечными*.

Если $f(x)=0$, то дифференциальное уравнение (4.3) или (4.4) однородные, если $f(x)\neq 0$ — неоднородные.

Краевые условия называются *линейными*, если они имеют вид

$$R_\nu(y)=\gamma_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{4.5}$$

где $R_\nu(y)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_k^{(\nu)}y^k(a)+\beta_k^{(\nu)}y^k(b)\right]$ и $\alpha_k^{(\nu)}$, $\beta_k^{(\nu)}$, γ_ν — заданные постоянные, причем $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(|\alpha_k^{(\nu)}|+|\beta_k^{(\nu)}|\right)\neq 0$.

Так, краевые условия, приведенные в § 1, пример 1, являются линейными, поскольку их можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)&=\gamma_1,\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)&=\gamma_2,\end{aligned}\right\}$$

где α_0, α_1, β_0, β_1, γ_1, γ_2 — заданные постоянные. В этом же примере имеем $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$, $\gamma_1=y_a$, $\beta_0=1$, $\beta_1=0$, $\gamma_2=y_b$.

Если $\gamma_\nu=0$, то соответствующее краевое условие называется *однородным*, если $\gamma_\nu\neq 0$ — *неоднородным*.

Линейная краевая задача формулируется: найти функцию $y=y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению (4.4) и краевым условиям (4.5).

Линейная краевая задача (4.4) — (4.5) называется *однородной*, если $f(x)\equiv 0$ и $\gamma_\nu=0$ ($\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), т. е. когда дифференциальное уравнение и краевые условия однородны. В противном случае линейная краевая задача называется *неоднородной*.

А. Однородная краевая задача

Рассмотрим однородную линейную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y&=0 \quad (a\leqslant x\leqslant b)\\ \text{с краевыми условиями}\\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)&=0,\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Здесь $a_0(x)\neq 0$ и $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[a,\ b]$ изменения аргумента x.

Предположим, что числа α_1, β_1 не равны нулю, а также не равны нулю числа α_2 и β_2. Очевидно, что краевая задача (4.6) допускает всегда нулевое решение $y(x)\equiv 0$. Найдем условие существования ненулевых решений однородной краевой задачи. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x). \tag{4.6'}$$

Для удовлетворения краевых условий необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0,\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0.\end{aligned}\right\}$$

Используя соотношение (4.6′), имеем

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1[C_1y_1(a)+C_2y_2(a)]+\beta_1[C_1y_1'(a)+C_2y_2'(a)]=0,\\ \alpha_1[C_1y_1(b)+C_2y_2(b)]+\beta_2[C_1y_1'(b)+C_2y_2'(b)]=0.\end{aligned}\right\}$$

Группируя коэффициенты при C_1 и C_2, получаем

$$\left.\begin{aligned}C_1[\alpha_1y_1(a)+\beta_1y_1'(a)]+C_2[\alpha_1y_2(a)+\beta_1y_2'(a)]=0,\\ C_1[\alpha_2y_1(b)+\beta_2y_1'(b)]+C_2[\alpha_2y_2(b)+\beta_2y_2'(b)]=0.\end{aligned}\right\}$$

Введем следующие сокращения:

$$\left.\begin{aligned}C_a(u)=\alpha_1u(a)+\beta_1u'(a),\\ C_b(u)=\alpha_2u(b)+\beta_2u'(b),\end{aligned}\right\}$$

где $u=u(x)$ — любая функция x. Очевидно, что тогда система

$$\left.\begin{aligned}C_1C_a(y_1)+C_2C_a(y_2)=0,\\ C_1C_b(y_1)+C_2C_b(y_2)=0\end{aligned}\right\}$$

имеет ненулевые решения относительно C_1 и C_2, если определитель

$$D=\begin{vmatrix}C_a(y_1) & C_a(y_2)\\ C_b(y_1) & C_b(y_2)\end{vmatrix}=0. \tag{4.7}$$

Итак, ненулевые решения краевой задачи (4.6) существуют тогда и только тогда, если выполняется условие (4.7).

Пример 1. Решить однородную краевую задачу

$$y''-4y=0 \quad \text{при} \quad y(0)=y(1)=0.$$

Решение. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$$

Подставляя краевые условия, получаем систему

$$\left.\begin{aligned}C_1+C_2=0,\\ C_1e^2+C_2e^{-2}=0.\end{aligned}\right\}$$

Так как определитель

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^2 & e^{-2}\end{vmatrix}=e^{-2}-e^2=\frac{1}{e^2}-e^2=\frac{1-e^4}{e^2}\neq 0,$$

то существует только нулевое решение $y\equiv 0$, при котором $C_1=C_2=0$.

Пример 2. Решить однородную краевую задачу

$$y'' + 4y = 0 \text{ при } y(0) = y(\pi) = 0.$$

Решение. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Подставляя краевые условия, получим

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \text{ т. е. } C_2 = 0,$$
$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \text{ т. е. } C_2 = 0.$$

Очевидно, что $C_2 = 0$, C_1 — любое число. Поэтому $y = C_1 \sin 2x$ является решением однородной краевой задачи для любых чисел C_1.

В примере 2 все решения краевой задачи задавались однопараметрическим семейством $y = Cu(x)$, где $u(x)$ — частное ненулевое решение. Этот результат можно обобщить: если $u(x)$ является частным ненулевым решением краевой задачи (4.6), то все решения определяются равенством $y = Cu(x)$, где C — произвольная постоянная.

Б. Неоднородная краевая задача

Найти решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x) \tag{4.8}$$

при краевых условиях:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned} \tag{4.8'}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{4.8''}$$

где $y_0(x)$ — частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения (4.8); $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Подставляя общее решение (4.8″) в данные краевые условия (4.8′), получаем систему неоднородных алгебраических уравнений относительно C_i $(i = 1, 2)$:

$$\left.\begin{aligned} C_1[\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)] + C_2[\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)] &= \\ = \gamma_1 - [\alpha_1 y_0(a) + \beta_1 y_0'(a)], & \\ C_1[\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + C_2[\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] &= \\ = \gamma_2 - [\alpha_2 y_0(b) + \beta_2 y_0'(b)]. & \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Составляем определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix}. \tag{4.10}$$

Решения C_i неоднородной системы уравнений (4.9) существуют (в общем случае), если

$$D \neq 0.$$

Пример 3. Решить неоднородную краевую задачу

$$y'' + y = \sin x \text{ при } y(0) = y(1) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$r^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

откуда $r^2 = -1$ и $r_{1,2} = \pm i$. Так как корни характеристического уравнения мнимые, то общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{2}$$

Общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \tag{3}$$

Предположим, что

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \tag{4}$$

т. е. используем метод вариации постоянных интегрирования. Тогда

$$y' = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x,$$

$$y'' = -C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x - C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x.$$

Подставляя выражения y'' и y' в данное дифференциальное уравнение, имеем

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \sin x. \tag{5}$$

Из уравнений (4) и (5), находим

$$C_1'(x) = -\sin^2 x, \quad C_2'(x) = \sin x \cos x.$$

Интегрируя полученные выражения и опуская произвольные постоянные, имеем

$$dC_1(x) = -\sin^2(x)\, dx.$$

Так как

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

то

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x\, d(2x) =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2}.$$

Аналогично получим

$$dC_2(x) = \sin x \cos x\, dx.$$

Учитывая, что $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, находим

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = \frac{1}{4} \int \sin 2x\, d(2x) = -\frac{1}{4} \cos 2x.$$

Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в соотношение (3), имеем

$$y_ч = \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2}\right) \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x \sin x = \frac{1}{4} (\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x) -$$
$$- \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{4} [2 \sin x \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x] -$$
$$- \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{4} (2 \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x) \sin x - \frac{x}{2} \cos x =$$
$$= \frac{1}{4} (\cos^2 x + \sin^2 x) \sin x - \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{4} \sin x - \frac{x}{2} \cos x. \qquad (6)$$

Тогда, общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения

$$y = y_{одн} + y_ч = C_1 \cos x + \left(C_2 + \frac{1}{4}\right) \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

Полагая $C_2 + \frac{1}{4} = \tilde{C}_2$, получим

$$y = C_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x. \qquad (7)$$

Согласно заданным краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 \cdot 1 + \tilde{C}_2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0, \\ y(1) &= C_1 \cdot \cos 1 + \tilde{C}_2 \cdot \sin 1 - \frac{1}{2} \cdot \cos 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + \tilde{C}_2 \cdot 0 &= 0, \\ C_1 \cdot \cos 1 + \tilde{C}_2 \cdot \sin 1 &= \frac{1}{2} \cos 1. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{vmatrix} = \sin 1 \neq 0.$$

Искомые решения системы:

$$C_1 = 0; \quad \tilde{C}_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1.$$

Поэтому краевая задача имеет единственное решение

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1 \cdot \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

Пример 4. Решить неоднородную краевую задачу

$$y''+\pi^2 y=0 \text{ при } y(0)=1,\ y(1)=-1.$$

Решение. Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1\sin\pi x+C_2\cos\pi x.$$

Учитывая первое краевое условие, получим

$$y(0)=C_1\cdot\sin 0+C_2\cdot\cos 0=1,$$

т. е. $C_2=1$. Подставляя в общее решение второе краевое условие, имеем $y(1)=C_1\sin\pi+C_2\cos\pi=-1$, т. е. $-C_2=-1$, или $C_2=1$.

Таким образом, оба условия идентичны и удовлетворяются при $C_2=1$, причем постоянная C_1 выбирается произвольно.

Поэтому искомое решение краевой задачи имеет вид

$$y=C_1\sin\pi x+C_2\cos\pi x.$$

Упражнения

Найти решение краевых задач:

1. $y''+y=0$; $y=0$ при $x=0$, $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Отв. $y=\sin x$.

2. $y''+y=0$; $y=0$ при $x=0$, $y=0$ при $x=\pi$.

Отв. $y=C\sin x$.

3. $y''+y=0$; $y=1$ при $x=0$, $y=1$ при $x=\pi$.

Отв. Решения нет.

4. $y''+y=x$; $y=1$ при $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ при $x=\frac{\pi}{2}$.

Отв. $y=\cos x+x$.

5. $y''-y=0$; $y=1$ при $x=0$, $y=\frac{e^2+1}{2e}$ при $x=1$.

Отв. $y=\operatorname{ch} x$.

6. $y''+4y'+5y=8\sin x$; $y(0)=1$, $y=\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Отв. $y=\sin x-\cos x+e^{-2x}(2\cos x+e^{\pi}\sin x)$.

7. $y''-2y'+4y=0$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)=1{,}353$.

Отв. $y=e^x\sin\sqrt{3}x$.

8. $y''+4y=\cos x+\sin 2x$; $y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отв. $y=\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{4}(x+\pi)\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{3}\sin 2x$.

9. Найти все решения линейной однородной краевой задачи

$$y''+k^2y=0;\ y'(0)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{k}\right)=0.$$

Отв. $y=A\cos kx$, где A — произвольная постоянная.

10. При каких значениях параметра λ дифференциальное уравнение

$$y''+\lambda y=0$$

имеет ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям: $y=0$ при $x=0$, $y=0$ при $x=\pi$.

Отв. $\lambda=n^2$, $y_n=\sin nx$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$.

11. Найти ненулевые решения однородной краевой задачи

$$y''=0;\ y'(0)=y'(1)=0.$$

Отв. Ненулевое решение $y=\text{const}$.

Решить краевые задачи:

12. $y''+y'=1;\ y(0)=1,\ y(1)=2.$

Отв. $y=1+\dfrac{\sin x}{\sin 1}$.

13. $y''+9y=\sin x;\ y(0)=1,\ y(\pi)=-1.$

Отв. $y=\dfrac{1}{8}\sin x+\cos 3x+C\sin 3x.$

14. $y''+4y'+4y=0;\ y(0)=0,\ y'(1)=2.$

Отв. $y=-2xe^{2-2x}$.

15. $y''+y=0;\ y'(0)=1,\ y(\pi)=2.$

Отв. $y=\sin x-2\cos x$.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Двухточечные краевые условия возникают в различного рода технических и физических задачах, в частности, находят широкое применение при расчете балок.

Пример 1. Найти дифференциальное уравнение изгиба балки длины l под действием распределенной нагрузки интенсивностью $q=q(x)$ (рис. 34).

Решение. Рассмотрим часть балки, изгибаемую двумя равными и противоположно направленными моментами (рис. 35, *а*). Пусть линия NN есть нейтральный слой в балке (выше этого слоя находятся растянутые волокна балки, а ниже — сжатые).

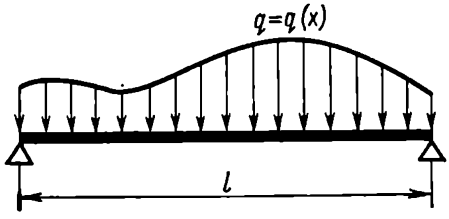


Рис. 34

Пусть общий центр кривизны изогнутых волокон расположен в точке O, а радиус кривизны нейтрального слоя равен R. Выделим с помощью двух близких сечений, проходящих через центр кривизны балки и образующих между собой бесконечно малый угол $d\varphi$, из рассматриваемой части балки элемент $ABDC$. Бесконечно малая длина ds волокна gh нейтрального слоя после изгиба не изменится. Волокно g_1h_1, лежащее на расстоянии y от нейтрального слоя, получит некоторое удлинение. Чтобы найти его, проведем из точки h линию, параллельную AB. Тогда дуга h_1h' есть искомое удлинение.

Из подобия треугольников Ogh и hh_1h' имеем

$$\frac{h_1h'}{ds}=\frac{y}{R}. \tag{1}$$

Левая часть равенства (1) определяет относительное удлинение ε волокна $g'h'$, которое до деформации имело длину ds. Итак,

$$\varepsilon=\frac{y}{R}. \tag{2}$$

Поскольку волокна балки при изгибе испытывают только растяжение и сжатие, то для определения распределения упругих сил по сечению можно применить закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{3}$$

где σ — напряжение во всех точках поперечного сечения балки, E — модуль упругости. Подставляя в равенство (3) соотношение (2),

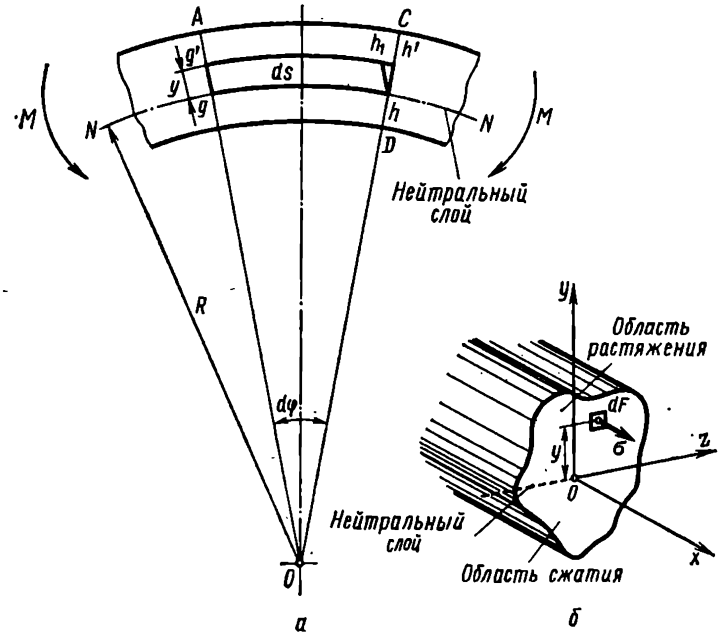


Рис. 35

найдем закон распределения упругих сил по поперечному сечению балки:

$$\sigma = E\frac{y}{R}. \tag{4}$$

Определим радиус кривизны R нейтрального слоя. Из площади поперечного сечения (рис. 35, *б*) выделим элементарную площадку dF, находящуюся на расстоянии y от нейтральной линии. Элементарная нормальная (продольная) сила, действующая в этой площадке,

$$dN = \sigma\, dF = \frac{Ey}{R}\, dF. \tag{5}$$

По условию статического равновесия момент внутренних сил, действующих в сечении, должен быть равен моменту внешних сил, поэтому сумма проекций их на ось балки x должна быть равна нулю:

$$\int_F dN = \int_F \frac{Ey}{R}\, dF = 0.$$

Вынося за знак интеграла по всему сечению F постоянный множитель, имеем

$$\frac{E}{R}\int_F y\,dF = 0.$$

Так как отношение $\frac{E}{R}$ не может равняться нулю, то

$$\int_F y\,dF = 0. \tag{6}$$

Соотношение (6) представляет статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной линии.

Принимая во внимание соотношения (5), видим, что элементарный момент внутренней силы, действующей на площадке dF, относительно нейтральной оси Z равен

$$dN \cdot y = \frac{E}{R} y\,dF \cdot y = \frac{E}{R} y^2\,dF.$$

Сумма всех элементарных моментов внутренних сил упругости в соответствии с условиями статического равновесия равна внешнему моменту, т. е.

$$\int_F \frac{E}{R} y^2\,dF = \frac{E}{R}\int_F y^2\,dF = M. \tag{7}$$

Интеграл $I = \int_F y^2\,dF$ представляет момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси. Тогда

$$M = \frac{EI}{R}. \tag{8}$$

Произведение EI называется *жесткостью балки при изгибе*. На практике деформации балок незначительны и поэтому изогнутая ось балки очень мало отличается от прямой линии.

Поместим начало координат в один из концов балки. Деформированную ось балки может характеризовать ее рассстояние y от оси x, проходящей через оба конца. Ввиду малости деформаций, производная $\frac{dy}{dx} = \varphi$ (φ — угол наклона оси балки) практически очень мала. Поэтому точную формулу для определения кривизны

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

можно заменить более простым выражением

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{9}$$

Знак выбирается в соответствии с принятым правилом знаков для M и y. Обычно изгибающий момент считается положительным, если он вращает левую часть балки по часовой стрелке и ось y направлена вниз. Тогда (рис. 36) кривизна, вызванная положительным изгибающим моментом M, такова, что производная $\frac{dy}{dx}$ алгебраически убывает с возрастанием x, т. е. подставляя значение кривизны (9) в соотношение (8), следует взять отрицательный знак.

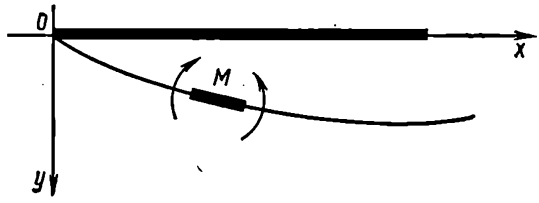


Рис. 36

Таким образом, приближенное уравнение изгибающего момента имеет вид

$$M = \frac{EI}{R} = -EI\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{10}$$

Пусть Q — поперечная сила, действующая в сечении балки. Из балки вырежем элементарный участок длиною dx и рассмотрим условия его равновесия (рис. 37). Из условия статического равновесия всех вертикальных сил имеем

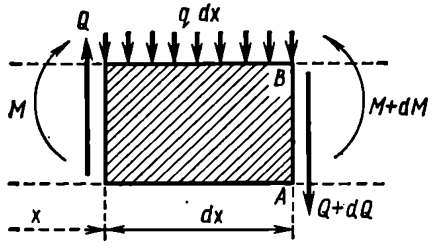


Рис. 37

$$q\,dx + (Q + dQ) - Q = 0,$$

или

$$q\,dx + dQ = 0. \tag{11}$$

Из условия равновесия всех моментов, действующих на любое сечение балки (например, на сечение AB), имеем

$$Q\,dx + M - (M + dM) = 0,$$

или

$$Q\,dx = dM. \tag{12}$$

Из равенства (11) находим

$$q = -\frac{dQ}{dx}; \tag{13}$$

из равенства (12) имеем

$$Q = \frac{dM}{dx}. \tag{14}$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Следовательно, изгибающий момент M и интенсивность q распределенной поперечной нагрузки связаны соотношением

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}. \tag{15}$$

Дважды дифференцируя (последовательно) соотношение (10), имеем

$$\frac{d}{dx}\left(-EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{dM}{dx},$$

откуда, учитывая равенство (14), получим

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -Q. \tag{16}$$

Далее, принимая во внимание соотношение (13), имеем

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{dQ}{dx} = q,$$

или окончательно

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q. \tag{17}$$

Прогиб y любой точки балки находится интегрированием этого дифференциального уравнения.

Очевидно, что существуют следующие взаимосвязанные функции:

y — прогиб;

$\frac{dy}{dx} = \varphi$ — угол поворота;

$-EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$ — изгибающий момент;

$-EI\frac{d^3y}{dx^3} = Q$ — поперечная сила;

$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q$ — интенсивность нагрузки.

Общее решение дифференциального уравнения (17) содержит четыре произвольные постоянные, которые можно определить из краевых условий, используя значения прогиба y и его производных на концах балки.

Если балка длины l свободно опирается двумя концами, то прогибы и изгибающие моменты на этих концах равны нулю и произвольные постоянные определяются из краевых условий

$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Если балка защемлена, то краевые условия следующие:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Консольная балка (с одним свободным концом) в защемлении ($x = 0$) имеет краевое условие

$$y = \frac{dy}{dx} = 0;$$

на свободном конце ($x=l$), так как поперечная сила и изгибающий момент равны нулю,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^3y}{dx^3}=0.$$

Пример 2. Найти максимальный прогиб консольной балки длины l, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 38).

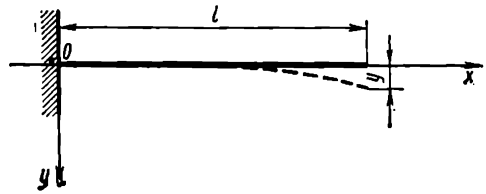


Рис. 38

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q.$$

Интегрируя последовательно это дифференциальное уравнение, имеем

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=qx+C_1,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}qx^2+C_1x+C_2,$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

$$EIy=\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Так как краевые условия

$$y=\frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=0,$$

то $C_3=C_4=0$. Кроме того,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^3y}{dx^3}=0 \text{ при } x=l,$$

откуда

$$C_1=-ql,\ C_2=\frac{1}{2}ql^2.$$

Таким образом,

$$EIy=\frac{1}{24}qx^4-\frac{1}{6}qlx^3+\frac{1}{4}ql^2x^2,$$

откуда

$$y=\frac{q}{24EI}x^2(x^2-4lx+6l^2).$$

Балка имеет максимальный прогиб на конце (при $x=l$):

$$y(l)=\frac{ql^4}{8EI}.$$

Пример 3. Найти максимальный прогиб консольной балки длины l, нагруженной на конце сосредоточенной силой P. Собственным весом балки пренебречь ($q=0$) (рис. 39).

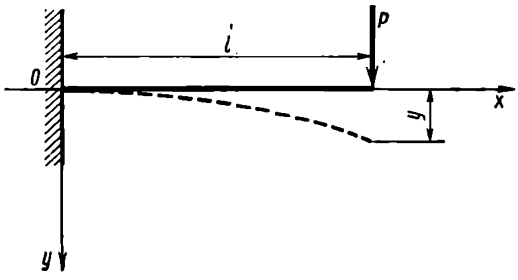


Рис. 39

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$

Интегрируя последовательно это дифференциальное уравнение, имеем

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=C_1,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=C_1x+C_2,$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

$$EIy=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4.$$

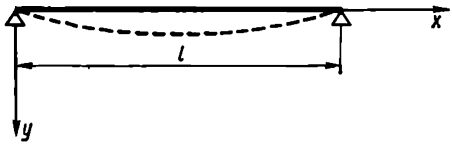


Рис. 40

Так как $y=\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$, то

$$C_3=C_4=0.$$

В точке $x=0$ поперечная сила Q равна $-P$, а изгибающий момент $M=Pl$. Поэтому

$$C_1=-P,\ C_2=Pl.$$

Следовательно,

$$EIy=-\frac{1}{6}Px^3+\frac{1}{2}Plx^2.$$

Максимальное отклонение (в точке $x=l$)

$$y(l)=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

Пример 4. Найти максимальный прогиб двухопорной балки длины l нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 40).

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=q.$$

Последовательно интегрируя это дифференциальное уравнение, получим

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=qx+C_1,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}qx^2+C_1x+C_2,$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

$$EIy=\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Изгибающий момент на обоих концах равен нулю, поэтому

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \text{ и } x=l.$$

Отсюда

$$C_2=0 \text{ и } C_1=-\frac{1}{2}ql.$$

В точках $x=0$ и $x=l$ прогиб $y=0$, следовательно,

$$y(0)=C_4=0,$$

откуда $C_4=0$. Тогда

$$y(l)=\frac{1}{24}ql^4-\frac{1}{12}ql^4+C_3l=0,$$

т. е.

$$C_3=\frac{1}{24}ql^3.$$

Таким образом,

$$EIy=\frac{q}{24}(x^4-2x^3l+xl^3)=\frac{q}{24}x(x-l)(x^2-xl-l^2).$$

Ввиду полной симметрии системы при $x=\frac{l}{2}$ производная $\frac{dy}{dx}=0$ и балка имеет максимальный прогиб в середине:

$$y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5ql^4}{384EI}.$$

Пример 5. Найти прогиб y упругого горизонтального стержня постоянного сечения, шарнирно опертого на левом конце ($x=0$) и защемленного в правом конце ($x=l$), под действием распределенной нагрузки $q(x)$ (рис. 41).

Решение. Пусть нагрузка на единицу длины в сечении x равна $q(x)$. Тогда функция y, представляющая собой вертикальный прогиб однородного стержня, приближенно удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$EIy^{IV}=q(x). \qquad (1)$$

Здесь EI — постоянная жесткость стержня при изгибе, причем изгибающий момент M и поперечная сила Q определяются из соотношений

$$M = EIy'', \quad Q = M' = EIy'''.$$

Краевые условия зависят от способа заделки концов стержня. В данном случае левый конец стержня шарнирно оперт. В этом случае прогиб y и изгибающий момент M равны нулю. Краевые условия для шарнирно опертого конца

$$y = 0 \text{ и } y'' = 0. \qquad (2)$$

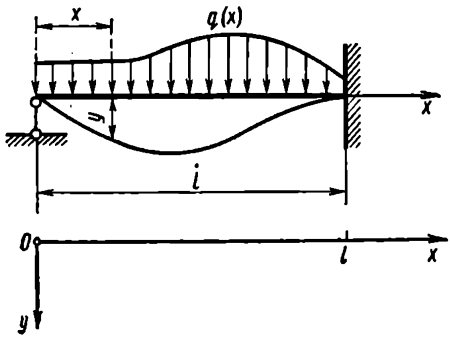


Рис. 41

Правый конец стержня жестко заделан (т. е. защемлен). В этом случае прогиб y и угол поворота $\varphi = \operatorname{arctg} y'$ равны нулю. Краевые условия для защемленного конца

$$y = 0 \text{ и } y' = 0. \qquad (3)$$

Поэтому функция y должна удовлетворять также краевым условиям

$$\begin{aligned} &y = 0,\ y'' = 0 \text{ на левом конце при } x = 0; \\ &y = 0,\ y' = 0 \text{ на правом конце при } x = l. \end{aligned} \qquad (4)$$

С механической точки зрения это значит, что концы рассматриваемого стержня останутся после деформации на одном и том же уровне, т. е. при $x = 0$ и $x = l$, $y = 0$, т. е. прогибы в этих точках отсутствуют. Так как правый конец жестко защемлен, то угол поворота $\varphi = 0$, следовательно, при $x = l$ имеем $\operatorname{tg}\varphi = y' = 0$. Левая опора является свободно опертой, т. е. отсутствует изгибающий момент M. Таким образом, поскольку изгибающий момент пропорционален второй производной, то при $x = 0$ имеем $y'' = 0$.

Итак, краевые условия (4) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} &y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \\ &y(l) = 0, \quad y'(l) = 0. \end{aligned} \qquad (4')$$

Краевые условия (4′) являются линейными однородными, так как их можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &1 \cdot y(0) + 0 \cdot y''(0) + 0 \cdot y(l) + 0 \cdot y'(l) = 0, \\ &0 \cdot y(0) + 1 \cdot y''(0) + 0 \cdot y(l) + 0 \cdot y'(l) = 0, \\ &0 \cdot y(0) + 0 \cdot y''(0) + 1 \cdot y(l) + 0 \cdot y'(l) = 0, \\ &0 \cdot y(0) + 0 \cdot y''(0) + 0 \cdot y(l) + 1 \cdot y'(l) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Краевая задача (1), (4′) решается обычным способом: получив общее решение дифференциального уравнения (1), определяем произвольные постоянные так, чтобы они удовлетворяли краевым условиям (4′); таким образом находим частное решение, которое и будет решением краевой задачи (1), (4′).

При постоянной правой части $q(x)=q$ ($q=\text{const}$), т. е. если для простоты считать нагрузку равномерно распределенной, то общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$y=\frac{qx^4}{24EI}+C_1\frac{x^3}{EI}+C_2\frac{x^2}{EI}+C_3\frac{x}{EI}+C_4. \tag{6}$$

Дифференцируя полученное общее решение, имеем

$$y'=\frac{qx^3}{6EI}+3C_1\frac{x^2}{EI}+2C_2\frac{x}{EI}+\frac{C_3}{EI},$$

$$y''=\frac{qx^2}{2EI}+6C_1\frac{x}{EI}+\frac{2C_2}{EI}.$$

Тогда из условий (4′) получаем:

если $x=0$, $y=0$, то $C_4=0$;

если $x=0$, $y''=0$, то $C_2=0$;

если $x=l$, $y=0$, то

$$\frac{ql^4}{24EI}+C_1\frac{l^3}{EI}+C_3\frac{l}{EI}=0; \tag{7}$$

если $x=l$, $y'=0$, то

$$\frac{ql^3}{6EI}+3C_1\frac{l^2}{EI}+C_3\frac{1}{EI}=0. \tag{8}$$

Из уравнений (7) и (8) находим

$$C_1=-\frac{ql}{16},\quad C_3=\frac{ql^3}{48}.$$

Искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{q}{48EI}(2x^4-3lx^3+l^3x).$$

Пример 6. Найти максимальный прогиб двухопорного стержня длины l, нагруженного в середине сосредоточенной силой P (рис. 42).

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба стержня (вес стержня $q=0$) имеет вид

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$

Последовательно интегрируя это дифференциальное уравнение, имеем

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = C_1 + [P]_{x>l/2},$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = C_1x + C_2 + \left[P\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]_{x>l/2},$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\left[\frac{1}{2}P\left(x-\frac{l}{2}\right)^2\right]_{x>l/2},$$

$$EIy = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 + \left[\frac{1}{6}P\left(x-\frac{l}{2}\right)^3\right]_{x>l/2}.$$

В первом из равенств определяется поперечная сила и в связи с этим, согласно условию равновесия вертикальных сил, на правую

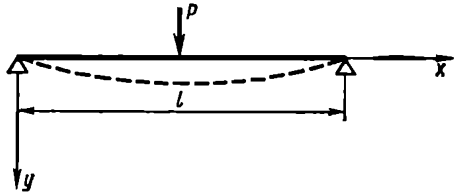


Рис. 42

половину пролета действует сила P. Используя краевые условия, получаем:

если $x=0$, $y=\frac{d^2y}{dx^2}=0$, то

$$C_4 = C_2 = 0;$$

если $x=l$, $y=\frac{d^2y}{dx^2}=0$, то

$$\left.\begin{aligned} C_1l^2 + \frac{1}{2}Pl = 0, \\ \frac{1}{6}C_1l^3 + C_3l + \frac{1}{48}Pl^3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$C_1 = -\frac{1}{2}P, \quad C_3 = \frac{1}{16}Pl^2.$$

Таким образом,

$$EIy = \frac{Px}{48}(3l^2 - 4x^2) + \left[\frac{P}{48}(2x-l)^3\right]_{x>\frac{l}{2}}.$$

Максимальный прогиб в точке $x=\frac{l}{2}$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Пример 7. Найти прогиб в середине балки длины l, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q и лежащей на упругом основании, модуль упругости которого k. Концы балки шарнирные (рис. 43).

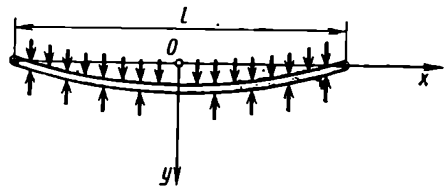


Рис. 43

Решение. Балка по всей своей длине опирается на упругое основание, так что в каждой точке имеется реакция основания, пропорциональная прогибу и направленная, естественно, противоположно.

Тогда, если y — прогиб, то сила реакции равна $-ky$ (k — коэффициент упругости основания). Дифференциальное уравнение изгиба в этом случае имеет вид

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -ky + q.$$

Полагая

$$k = 4EI\beta^4,$$

запишем дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\beta^4 y = \frac{q}{EI}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4 + 4\beta^4 = 0,$$

откуда

$$r_{1,\,2,\,3,\,4} = \beta(\pm 1 \pm i).$$

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = Pe^{\beta x+\beta ix} + Qe^{\beta x-\beta ix} + Re^{-\beta x+\beta ix} + Se^{-\beta x-\beta ix} =$$
$$= e^{\beta x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) + e^{-\beta x}(C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x),$$

где P, Q, R, S и C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Частное решение

$$y_ч = \frac{1}{C_1^4 + 4\beta^4}\cdot\frac{q}{EI}.$$

При постоянной интенсивности q равномерно распределенной нагрузки

$$y_ч = \frac{q}{k}.$$

Используя гиперболические функции, общее решение запишем в виде

$$y = \frac{q}{k} + C_1\operatorname{ch}\beta x\cos\beta x + C_2\operatorname{sh}\beta x\sin\beta x + C_3\operatorname{ch}\beta x\sin\beta x + C_4\operatorname{sh}\beta x\cos\beta x.$$

Так как прогиб y симметричен, то

$$C_3 = C_4 = 0.$$

Поскольку, согласно принятой системе координат, $y = 0$ при $x = \frac{l}{2}$, то

$$C_1 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2} = -\frac{q}{k}. \quad (1)$$

Изгибающий момент на концах равен нулю и поэтому $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \beta (C_2 - C_1) \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + \beta (C_1 + C_2) \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\beta^2 C_2 \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x - 2\beta^2 C_1 \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x.$$

Поэтому

$$C_2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2} - C_1 \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2} = 0. \quad (2)$$

На основании равенств (1) и (2) находим

$$C_1 = -\frac{2q}{k} \cdot \frac{\cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l},$$

$$C_2 = -\frac{2q}{k} \cdot \frac{\sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l}.$$

Прогиб в центре

$$y = \frac{q}{k} + C_1.$$

Задача. Найти критические скорости тонкого вращающегося вала длины l. Радиус поперечного сечения вала a, сила тяжести P, модуль упругости материала E.

Решение. При увеличении угловой скорости вращающегося вала от $\omega = 0$ до некоторого предельного значения $\omega = \omega_1$ (называемого критической угловой скоростью) вал сохраняет свою прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости ω_1 вал искривляется и начинает «бить». При дальнейшем увеличении ω биение прекращается, а затем вновь возникает при достижении второй критической скорости ω_2 и так периодически.

При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент вала $d\xi$ (рис. 44) действует центробежная сила

$$F = m\omega^2\eta,$$

где m — масса элемента $d\xi$; ω — угловая скорость вращения; η — прогиб, равный радиусу вращения элемента $d\xi$.

Сила тяжести элемента $d\xi$ равна $\frac{P}{l}\,d\xi$, а масса $m=\frac{P}{gl}\,d\xi$. Таким образом, элементарная центробежная сила $dF=\frac{P}{gl}\,\omega^2\eta\,d\xi$. Прогиб η является функцией ξ, определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, $\frac{P}{gl}\,\omega^2\eta=f(\xi)$ и, окончательно, элементарная центробежная сила

$$dF=f(\xi)\,d\xi=\frac{P}{gl}\,\omega^2\eta\,d\xi. \tag{1}$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения B

$$dF\cdot(x-\xi)=(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Изгибающий момент

$$M=\int_0^x(x-\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

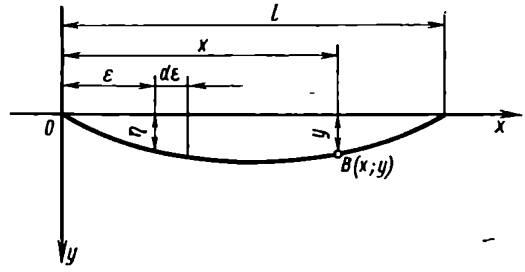


Рис. 44

Дифференцируя выражение под знаком интеграла дважды по параметру x, получим

$$\frac{dM}{dx}=\int_0^x f(\xi)\,d\xi+(x-x)\,f(x)\,\frac{dx}{dx}-(x-0)\,f(0)\,\frac{d}{dx}(0)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\int_0^x 0\cdot d\xi+f(x)\,\frac{dx}{dx}-f(0)\,\frac{d}{dx}(0)=f(x). \tag{2}$$

Так как на основании равенства (1) имеем $f(x)=\frac{P}{gl}\,\omega^2y$, то выражение (2) принимает вид

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{P\omega^2}{gl}\,y.$$

Получаем дифференциальное уравнение упругой линии

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{P\omega^2}{EIgl}\,y=0. \tag{3}$$

Введем обозначение: $\frac{P\omega^2}{EIgl}=q^4$. Тогда дифференциальное уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^4y}{dx^4}-q^4y=0.$$

Решая это неполное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, получаем характеристическое уравнение

$$r^4-q^4=0,$$

или

$$(r-q)\,(r+q)\,(r^2+q^2)=0.$$

Корни характеристического уравнения

$$r_1 = q, \quad r_2 = -q, \quad r_3 = qi, \quad r_4 = -qi.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии вала имеет вид

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \sin qx + C_4 \cos qx. \tag{4}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 используем краевые условия задачи. На опертых концах вала прогиб и кривизна оси вала равны нулю. Математически это выражается четырьмя краевыми условиями:

1) при $x = 0$, $y = 0$;
2) при $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$;
3) при $x = l$, $y = 0$;
4) при $x = l$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Дифференцируя дважды общее решение (4), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} + C_3 q \cos qx - C_4 q \sin qx, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} - C_3 q^2 \sin qx - C_4 q^2 \cos qx. \end{aligned}\right\}$$

Учитывая краевые условия, получаем следующую систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 e^{q \cdot 0} + C_2 e^{-q \cdot 0} + C_3 \sin (q \cdot 0) + C_4 \cos (q \cdot 0) = 0, \\ &C_1 q^2 e^{q \cdot 0} + C_2 q^2 e^{-q \cdot 0} - C_3 q^2 \sin (q \cdot 0) - C_4 q^2 \cos (q \cdot 0) = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ &C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ &C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \sin ql - C_4 \cos ql = 0. \end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= -C_1, \\ C_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Поступая аналогично с двумя последующими уравнениями той же системы, имеем

$$\left.\begin{aligned} C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставляя значение (5) в равенства (6), получаем

$$\left.\begin{aligned} C_3 \sin ql = 0, \\ C_1 (e^{ql} - e^{-ql}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как при $l \neq 0$ и $q \neq 0$ последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то окончательно имеем

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ C_3 \sin ql = 0,\ C_4 = 0.$$

При $C_3 = 0$ уравнение упругой линии вала $y = 0$, т. е. упругая линия совпадает с осью x и вал не искривлен. При искривлении вала необходимо, чтобы $C_3 \neq 0$, но тогда также необходимо, чтобы $\sin ql = 0$. Отсюда $ql = k\pi$, т. е. $q = \frac{k\pi}{l}$, где $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Если $k = 0$, то $q = 0$ и уравнение упругой линии вала имеет вид

$$y = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

т. е. вал прямой. При остальных значениях q вал искривляется. В этих случаях (при $q = q_1 = \frac{\pi}{l}$, $q = q_2 = \frac{2\pi}{l}$, $q = q_3 = \frac{3\pi}{l}$, ...) уравнение упругой линии

$$y = C_3 \sin ql.$$

Упругая линия будет синусоидой:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_3 \sin \frac{\pi}{l} x, \\ y &= C_3 \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ y &= C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

содержащей по длине вала одну, две, три и т. д. полуволн. Таким образом, при критическом значении

$$q_{кр} = \frac{k\pi}{l}$$

упругая линия будет синусоидой с k полуволнами по длине.

Вернемся к ранее введенному обозначению

$$q^4 = \frac{P\omega^2}{EIgl}.$$

Подставляя в это равенство критические значения $q_{кр}$ и $\omega_{кр}$, получим

$$q_{кр}^4 = \frac{P\omega_{кр}^2}{EIgl}.$$

Далее имеем

$$\frac{k^4\pi^4}{l^4} = \frac{P\omega_{кр}^2}{EIgl},$$

т. е.

$$\omega_{кр} = \frac{k^2\pi^2}{l}\sqrt{\frac{EIg}{Pl}}.$$

Вычислим момент инерции площади сечения вала. Момент инерции I материальной точки относительно оси есть, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции всей площади поперечного сечения вала

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum R^2 \Delta m = \int R^2\, dm,$$

где Δm — масса элементарной частицы; R — расстояние любой точки элементарной частицы от оси; dm — дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для вала) при плотности $\rho = 1$. В общем случае $dm = \rho\, dV$ и $I = \rho \int R^2\, dV$.

Момент инерции площади поперечного сечения вала относительно диаметра

$$I = \frac{\rho\pi a^4}{4}.$$

Эту величину можно найти в справочных таблицах или вычислить с помощью определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра. Масса вала $m = \rho\pi a^2 l = \frac{P}{g}$. Таким образом, момент инерции сечения вала

$$I = \frac{Pa^2}{4gl}$$

и для определения критической скорости получим выражение

$$\omega_{кр} = \frac{k^2\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}.$$

Минимальная критическая скорость

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}.$$

Следует отметить, что в рассмотренных примерах процесс решения состоял в нахождении общего решения дифференциального уравнения, а затем в выборе постоянных, удовлетворяющих краевым условиям. Это обычный путь решения, но не единственный. Таким образом, если можно найти общее решение дифференциального уравнения, то двухточечная краевая задача не намного труднее, чем задача

с начальными условиями (задача Коши). Однако, если общее решение дифференциального уравнения не может быть найдено обычным путем, то решение краевой задачи усложняется, так как нет начальной точки, исходя из которой можно было бы построить решение. Если же необходимо найти численное решение дифференциального уравнения, то трудность заключается в том, что при любом методе интегрирования, основанном на постепенном переходе от точки к точке, требуется, чтобы это решение однозначно определялось условиями в начальной точке.

Кроме того, возникает другая трудность, связанная с тем, что решение может или вообще не существовать или определяться неоднозначно.

Упражнения

1. Найти максимальный прогиб балки длины l, защемленной обоими концами и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q.

Отв. $y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{ql^4}{384EI}$.

2. Найти максимальный прогиб балки длины l, защемленной обоими концами и нагруженной в середине сосредоточенной силой P.

Отв. $y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{Pl^3}{192EI}$.

§ 4. ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Однородная краевая задача (4.4) — (4.5) имеет всегда нулевое решение $y(x)\equiv 0$, которое с практической точки зрения не представляет интереса. Поэтому рассмотрим ненулевые решения однородной краевой задачи, которые существуют не всегда. В связи с этим в дифференциальное уравнение (4.4) или в краевые условия (4.5) вводится параметр λ, варьируя который можно добиться, чтобы при некоторых его значениях соответствующая краевая задача имела ненулевые решения.

Эти значения параметра $\lambda=\lambda_i$ называются *собственными значениями* или *характеристическими числами* задачи, а соответствующие им ненулевые решения $y_i(x)$ — *собственными* (*характеристическими*) *функциями* задачи. В результате приходим к задаче нового типа — *— задаче о собственных значениях.* Многие линейные однородные краевые задачи, встречающиеся в физических приложениях, включают параметр и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_0(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y+\lambda y=0 \quad (a\leqslant x\leqslant b),\\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0,\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

где λ — независящий от x параметр; $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ — непрерывные функции x на отрезке $[a, b]$, причем $a_0\neq b$.

Нулевые решения $y\equiv 0$ существуют для всех значений параметра λ.

Кроме того, возможно, что для определенных значений параметра λ существуют ненулевые решения.

Пример 1. Исследовать краевую задачу

$$\left.\begin{array}{l} y''+\lambda^2 y=0, \\ y(0)=0,\ y(1)=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Решение. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x.$$

Так как краевые условия должны удовлетворять этому решению, то

$$\left.\begin{array}{l} 0=C_1\cos 0+C_2\sin 0, \\ 0=C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda. \end{array}\right\}$$

Таким образом,

$$C_1=0,\ C_2\sin\lambda=0.$$

Итак, отличное от нуля решение краевой задачи, существует только тогда, когда $\sin\lambda=0$, т. е. при $\lambda=\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ldots$ Следовательно, эти значения параметра являются собственными значениями данной краевой задачи. Заметим, что числа

$$k^2=\lambda^2\pi^2 \qquad (\lambda=1,\ 2,\ 3)$$

также являются собственными значениями задачи (1) и им соответствуют собственные решения

$$y=C_2\sin\lambda\pi x \qquad (\lambda=\pm 1+2,\ \ldots).$$

Знать собственные значения и собственные (характеристические) функции во многих случаях весьма важно. Рассмотрим решение *неоднородной краевой задачи*

$$\left.\begin{array}{l} a_0(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y=f(x), \\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0, \\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

с помощью характеристических функций.

Предположим, что $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ — собственные значения дифференциального уравнения, а $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n$ — соответствующие характеристические функции. Тогда

$$a_0(x)\,y_i''+a_1(x)\,y_i'+a_2(x)\,y_i=-\lambda_i y_i \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{4.13}$$

и $y_i(x)$ удовлетворяют краевые условия. Предположим также, что функция $f(x)$ задана линейной комбинацией характеристических функций

$$f(x)=A_1y_1+A_2y_2+\ldots+A_ny_n. \tag{4.14}$$

Чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = A_1y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_ny_n \qquad (4.15)$$

принимаем, что решение y является линейной комбинацией характеристических функций

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (4.16)$$

где C_i должны быть определены так, чтобы удовлетворять дифференциальному уравнению. Подставляя решение (4.16) в уравнение (4.15), получаем

$$a_0(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n)'' + a_1(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n)' + \\ + a_2(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n) = A_1y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_ny_n. \qquad (4.17)$$

Так как

$$a_0(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n)'' + a_1(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n)' + \\ + a_2(x)\,(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n) = C_1\,[a_0(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1] + \\ + \ldots + C_n\,[a_0(x)\,y_n'' + a_1(x)\,y_n' + a_2(x)\,y_n] = \\ = C_1(-\lambda_1)\,y_1 + \ldots + C_n(-\lambda_n)\,y_n \qquad (4.18)$$

(здесь использован факт, что y_i представляют собой характеристические функции), то

$$-(C_1\lambda_1y_1 + \ldots + C_n\lambda_ny_n) = A_1y_1 + \ldots + A_ny_n. \qquad (4.19)$$

Предполагая, что y_i являются линейно независимыми функциями *, получаем

$$C_1 = \frac{-A_1}{\lambda_1},\quad C_2 = \frac{-A_2}{\lambda_2},\quad \ldots,\quad C_n = \frac{-A_n}{\lambda_n}, \qquad (4.20)$$

причем считаем, что никакие собственные значения не являются нулями. Тогда решение краевой задачи имеет вид

$$y = -\left(\frac{A_1}{\lambda_1}\,y_1 + \frac{A_2}{\lambda_2}\,y_2 + \ldots + \frac{A_n}{\lambda_n}\,y_n\right) \qquad (4.21)$$

и удовлетворяет не только дифференциальному уравнению, но и краевым условиям.

Пример 2. Найти минимальное значение силы $P_{кр}$ (критической силы), при котором происходит продольный изгиб стержня постоянной жесткости EI под действием сжимающей силы P, направленной вдоль оси стержня. Левый конец стержня ($x=0$) заделан, а правый ($x=l$) оперт (рис. 45).

---

* Функции y_i ($i=1, 2, \ldots, n$) называются *линейно зависимыми*, если существуют такие действительные числа λ_i, причем по крайней мере одно из них отлично от нуля, что

$$\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 + \ldots + \lambda_iy_i + \ldots + \lambda_ny_n = 0.$$

В противном случае эти функции y_i являются *линейно независимыми*.

Решение. Как известно из курса сопротивления материалов, величина отклонения стержня от его оси $y=y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению устойчивости стержня

$$y^{IV}+\frac{P}{EI}y''=0, \tag{1}$$

где P — параметр. В соответствии с условиями на концах стержня выполняются краевые условия:

$$y(0)=y'(0)=0,\ y(l)=y''(l)=0. \tag{2}$$

С математической точки зрения вопрос сводится к определению наименьшего положительного значения параметра P, при котором однородная краевая задача (1) — (2) имеет ненулевое решение. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

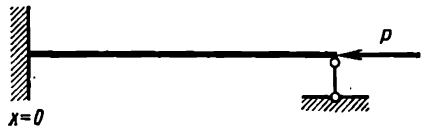


Рис. 45

$$y=C_1+C_2x+C_3\cos\alpha x+ +C_4\sin\alpha x, \tag{3}$$

где

$$\alpha=\sqrt{\frac{P}{EI}}, \tag{4}$$

а C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. На основании первых двух краевых условий (2), имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_3&=0,\\ C_2+C_4\alpha&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_3=-C_1,\ C_4=-\frac{C_2}{\alpha}.$$

Тогда общее решение (3) можно записать в виде

$$y=C_1(1-\cos\alpha x)+C_2\left(x-\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right).$$

На основании вторых двух краевых условий (2) имеем

$$\left.\begin{aligned} &C_1(1-\cos\alpha l)+C_2\left(l-\frac{\sin\alpha l}{\alpha}\right)=0,\\ &C_1\cos\alpha l+C_2\frac{\sin\alpha l}{\alpha}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Согласно физическому смыслу задачи, представляют интерес ненулевые решения. Поэтому определитель однородной линейной системы алгебраических уравнений (5) должен равняться нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha l & l-\dfrac{\sin\alpha l}{\alpha}\\ \cos\alpha l & \dfrac{\sin\alpha l}{\alpha}\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l = 0.$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha l$$

и, следовательно,

$$\alpha l = \mu, \tag{6}$$

где $\mu = 4{,}493\ldots$ — наименьший положительный корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

Подставляя в формулу (6) соотношение (4) и учитывая, что $P = P_{кр}$, имеем

$$\sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}}\, l = \mu,$$

откуда

$$\frac{P_{кр}}{EI}\, l^2 = \mu^2.$$

Решая полученное равенство относительно искомой критической силы, получаем

$$P_{кр} = \frac{\mu^2 EI}{l^2} \approx 20{,}187\, \frac{EI}{l^2}.$$

Упражнения

Для следующих краевых задач найти собственные значения и собственные функции:

1. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = y(l) = 0.$

Отв. $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2},\ y_n = A_n \cos\left[\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

2. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = y'(l) = 0.$

Отв. $\lambda^2 = \dfrac{n^2 \pi^2}{l^2},\ y_n = A_n \cos \dfrac{n \pi x}{l}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

3. $(xy')' + \dfrac{\lambda y}{x} = 0,\ y(1) = y(e^{\pi}) = 0.$

Отв. $\lambda_n = n^2,\ y_n = A_n \sin(n \ln x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

1. Уравнение теплопроводности. *Теплопроводностью* называется процесс распространения теплоты в телах, происходящий без перемещения вещества этих тел (т. е. без конвекции) и без лучистого теплообмена.

Пусть имеется неограниченная однородная среда, температура которой изменяется со временем. Выделим из этой среды бесконечно малый параллелепипед $ABCDEFGH$. Длины его ребер равны соответственно dx, dy, dz (рис. 46). Найдем количество теплоты, поглощаемой параллелепипедом за единицу времени.

Разность между количеством теплоты, вошедшей в параллелепипед через сечение $ABCD$ и вышедшей из него через сечение $EFGH$, равна

$$-k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_x dy\,dz + k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x+dx} dy\,dz, \tag{4.22}$$

где $U(x, y, z)$ — температура тела в какой-нибудь точке, k — коэффициент внутренней теплопроводности тела.

Эта разность с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна

$$k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx\,dy\,dz. \tag{4.23}$$

Учитывая теплоту, протекающую через остальные грани параллелепипеда, находим количество теплоты, поглощаемой этим параллелепипедом за единицу времени:

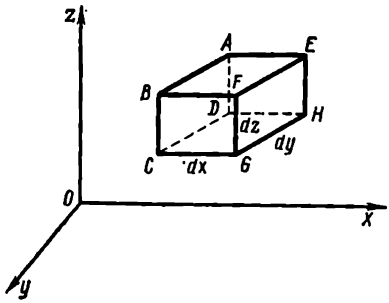


Рис. 46

$$k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz. \tag{4.24}$$

Это количество теплоты можно найти другим способом. Пусть dU — изменение температуры параллелепипеда за бесконечно малое время dt. Количество теплоты, поглощенной параллелепипедом $ABCDEFGH$ за это время, пропорционально ее массе dm и изменению температуры dU, т. е.

$$C \cdot dm \cdot dU,$$

где C — теплоемкость вещества рассматриваемой среды.

Это же количество теплоты, отнесенной к единице времени, можно записать в виде

$$C\rho\frac{\partial U}{\partial t} dx\,dy\,dz, \tag{4.25}$$

где ρ — плотность среды.

Сравнивая выражения (4.24) и (4.25), имеем

$$C\rho\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{C\rho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \tag{4.26}$$

Полагая $\frac{k}{C\rho} = a$, получаем дифференциальное уравнение распространения теплоты (теплопроводности) в однородной среде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \tag{4.27}$$

В частном случае, когда температура U зависит только от координат x и y (например, при распространении теплоты в тонкой пластинке), уравнение (4.27) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right). \tag{4.28}$$

Для тела линейного размера (например, стержня) уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{4.29}$$

Решение $U = U(x, t)$ этого дифференциального уравнения в частных производных описывает распределение температур в теплопроводящей среде.

Распределение теплоты в бесконечном стержне. Решим задачу распространения теплоты в бесконечном стержне. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, т. е. через нее теплота из стержня не уходит. Теплота проходит во внешнюю среду или в стержень через оба его конца.

Итак, необходимо найти ограниченную функцию $U(x, t)$ $(t \geqslant 0, -\infty < x < \infty)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (t \geqslant 0, \ -\infty < x < \infty) \tag{4.30}$$

и начальному условию

$$U|_{t=0} = U(x, 0) = f(x). \tag{4.30'}$$

Будем искать с помощью метода Фурье такие частные решения дифференциального уравнения (4.29), которые имели бы вид

$$U = X(x)\,T(t). \tag{4.31}$$

Подставляя выражение (4.31) в уравнение (4.29), имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2 T(t)\,X''(x),$$

или, после разделения переменных,

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — постоянная. Так как в каждой точке x стержня температура после некоторых возможных колебаний с течением времени стремится к нулю, то постоянная должна быть отрицательной. Следовательно, получаем два отдельных обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций X и T:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

или

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0; \tag{4.32}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

или

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{4.33}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (4.32), имеем

$$\frac{dT}{dt} = -a^2\lambda^2 T,$$

или

$$\frac{dT}{T} = -a^2\lambda^2\, dt,$$

откуда

$$\ln T = -a^2\lambda^2 t.$$

Потенцируя, получаем

$$T = C^* e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (4.33) составим характеристическое уравнение

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

и найдем его корни: $r_{1,2} = \pm \lambda i$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (4.33) имеет вид

$$X = e^0 (\bar{C}_1 \cos \lambda x + \bar{C}_2 \sin \lambda x) = \bar{C}_1 \cos \lambda x + \bar{C}_2 \sin \lambda x. \qquad (4.34)$$

Будем считать параметр λ^2 непрерывно изменяющимся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Каждому значению λ соответствуют определенные значения постоянных $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$, т. е. эти постоянные могут зависеть от λ. Так как краевые условия отсутствуют (стержень бесконечен), то параметр λ остается произвольным. Следовательно, можно считать, что

$$X = \bar{C}_1(\lambda) \cos \lambda x + \bar{C}_2(\lambda) \sin \lambda x.$$

Учитывая структуру частного решения (4.31), составим следующее частное решение уравнения теплопроводности (4.29):

$$U = X(x)\, T(t) = [C^* \bar{C}_1(\lambda) \cos \lambda x + C^* \bar{C}_2(\lambda) \sin \lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t} = \\ = [C_1(\lambda) \cos \lambda x + C_2(\lambda) \sin \lambda x]\, e^{-a^2\lambda^2 t},$$

где

$$C_1(\lambda) = C^* \bar{C}_1(\lambda), \quad C_2(\lambda) = C^* \bar{C}_2(\lambda),$$

или

$$U_\lambda(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t} [C_1(\lambda) \cos \lambda x + C_2(\lambda) \sin \lambda x]. \qquad (4.35)$$

Символ $U_\lambda(x, t)$ обозначает, что в равенстве (4.35) величина λ является параметром, а x и t — независимыми переменными.

Интегрируя уравнение (4.35) по параметру λ, получим решение уравнения теплопроводности (4.29):

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} [C_1(\lambda) \cos \lambda x + C_2(\lambda) \sin \lambda x]\, d\lambda \qquad (4.36)$$

при условии, что интеграл в правой части равенства сходится и дифференцируется под знаком интеграла один раз по t и дважды по x.

Выберем $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ так, чтобы удовлетворялось также начальное условие (4.30). Полагая в решении (4.36) $t=0$ и учитывая начальные условия, имеем

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[C_1(\lambda)\cos\lambda x+C_2(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{4.37}$$

Сравнивая интеграл в правой части равенства (4.37) с интегралом Фурье для функции $f(x)$, а именно с интегралом

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]d\lambda,$$

замечаем, что равенство (4.37) удовлетворяется, если принять

$$C_1(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\quad C_2(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{4.38}$$

Подставляем значения (4.38) в решение (4.36), в результате имеем

$$U(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi,$$

или, меняя порядок интегрирования, находим

$$U(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,d\xi\int_{0}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda. \tag{4.39}$$

Вычислим интеграл $\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda$. В этом интеграле роль аргумента играет величина λ. Поэтому выражения a^2t и $\xi-x$ в этом случае постоянны.

Пусть

$$z=a\sqrt{t}\,\lambda,\quad kz=\lambda(\xi-x)$$

и

$$d\lambda=\frac{dz}{a\sqrt{t}},\quad k=\frac{\lambda(\xi-x)}{z}=\frac{\xi-x}{a\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}\cos kz\,dz=\frac{1}{a\sqrt{t}}\,I(k). \tag{4.40}$$

Здесь

$$I(k)=\int_0^\infty e^{-z^2}\cos kz\,dz. \tag{4.40'}$$

Дифференцируя интеграл (4.40') по параметру k, находим

$$I'(k)=\int_0^\infty \frac{d}{dk}\left[e^{-z^2}\cos kz\right]dz=-\int_0^\infty e^{-z^2}z\sin kz\,dz. \tag{4.41}$$

Далее имеем

$$I'(k)=-\int_0^\infty e^{-z^2}z\sin kz\,dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\right)\sin kz\,dz.$$

Если к последнему интегралу применить интегрирование по частям, положив $u=\sin kz$, $dv=d\left(e^{-z^2}\right)$, откуда $du=k\cos kz\,dz$, $v=e^{-z^2}$, то получим

$$I'(k)=\frac{1}{2}e^{-z^2}\sin kz\Big|_0^\infty-\frac{k}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos kz\,dz. \tag{4.42}$$

Первый член полученного равенства

$$\frac{1}{2}e^{-z^2}\sin kz\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{e^{z^2}}\sin kz\right)-\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^{z^2}}\sin kz\right).$$

Рассмотрим первый предел:

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{e^{z^2}}\sin kz\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^{z^2}}\lim_{z\to\infty}\sin kz.$$

При $z\to\infty$ величина $\frac{1}{e^{z^2}}$ является бесконечно малой, а $\sin kz$ — величиной ограниченной, следовательно, их произведение является величиной бесконечно малой, т. е. искомый предел равен нулю.

Рассмотрим второй предел:

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{e^{z^2}}\sin kz\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{e^{z^2}}\lim_{z\to 0}\sin kz.$$

При $z\to 0$ величина $\frac{1}{e^{z^2}}$ стремится к единице, а величина $\sin kz$ стремится к нулю. Поэтому этот предел также равен нулю.

Итак, первый правый член равенства (4.42) равен нулю. Следовательно,

$$I'(k)=-\frac{k}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos kz\,dz. \tag{4.43}$$

Сравнивая выражение (4.43) с зависимостью (4.40′), получаем уравнение

$$I'(k) = -\frac{k}{2} I(k),$$

которому удовлетворяет интеграл $I(k)$.

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{dI(k)}{I(k)} = -\frac{k}{2} dk,$$

или, после интегрирования,

$$\ln I(k) = -\frac{k^2}{4} + C_1.$$

Потенцируя полученное равенство, имеем

$$e^{\ln I(k)} = e^{-\frac{k^2}{4} + C_1} = e^{C_1} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

или, принимая $e^{C_1} = C$, получаем

$$I(k) = Ce^{-\frac{k^2}{4}}, \tag{4.44}$$

где C — постоянная интегрирования.

Для нахождения C полагаем $k = 0$. Тогда

$$C = I(0) = \int_0^\infty e^{-z^2} \cos 0 \, dz = \int_0^\infty e^{-z^2} dz. \tag{4.45}$$

Интеграл $\int_0^\infty e^{-z^2} dz$ называется *интегралом Пуассона*. Этот часто встречающийся в приложениях интеграл вычисляется следующим искусственным приемом. Обозначим

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = K.$$

Для этого рассмотрим

$$K^2 = \int_0^\infty e^{-z^2} dz \int_0^\infty e^{-z_1^2} dz_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z^2 - z_1^2} dz \, dz_1.$$

Переходя в двойном интеграле, распространенном на половину плоскости переменных z и z_1, к полярным координатам $z = r\cos\varphi$, $z_1 = r\sin\varphi$, получим

$$K^2 = \int_{r=0}^\infty \int_{\varphi=0}^\pi e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi = \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr \int_0^\pi d\varphi = \int_0^\infty \varphi \Big|_0^\pi e^{-r^2} r \, dr =$$

$$= \pi \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr = -\frac{1}{2}\pi \int_0^\infty e^{-r^2} d(-r^2) = -\frac{\pi}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{\pi}{r} \frac{1}{e^{r^2}} \Big|_0^\infty = -\frac{\pi}{2} \left(\lim_{r \to \infty} \frac{1}{e^{r^2}} - \lim_{r \to 0} \frac{1}{e^{r^2}} \right) = -\frac{\pi}{2} (0 - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.46}$$

Поэтому

$$C = \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.47}$$

Тогда уравнение (4.44) можно записать в виде

$$I(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-k^2/4}. \tag{4.48}$$

На основании равенства (4.40) имеем

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}. \tag{4.49}$$

Подставляя зависимость (4.49) в решение (4.39), окончательно находим искомое выражение для температуры бесконечного стержня:

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\,d\xi. \tag{4.50}$$

Отметим, что уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

подстановкой

$$\tau = a^2 t, \text{ откуда } \partial\tau = a^2\,\partial t,$$

преобразуется к виду

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Отсюда получаем приведенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{4.51}$$

Распространение теплоты в конечном стержне. Если стержень ограничен, т. е. занимает отрезок $(0, l)$ оси x, то для постановки задачи о распространении теплоты в нем, необходимо знать дифференциальное уравнение теплопроводности, начальное условие и тепловой режим на концах стержня $x = 0$ и $x = l$, т. е. краевые условия.

Пусть имеется теплоизолированный (кроме, быть может, коицов) однородный нагретый стержень $0 \leqslant x \leqslant l$, где l — длина (рис. 47).

Температура стержня $U = U(x, t)$ в точке $x (0 < x < l)$ в любой момент времени t удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.29). В начальный момент $t = t_0$ для внутренних точек стержня обычно задается начальное распределение температуры. Это приводит к начальному условию

$$U(x, t_0) = f(x),$$

где $f(x)$ — известная функция. Распределение температуры $U(x, t)$ в стержне для последующих моментов времени $t > t_0$ существенно зависит от того, в каком состоянии находятся концы стержня $x = 0$ и $x = l$ (есть ли там утечка теплоты, каков тепловой режим и т. п.). В зависимости от состояния конца $x = 0$, имеем следующие основные краевые условия:

Рис. 47

1) конец стержня $x = 0$ поддерживается при заданной температуре

$$U(0, t) = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — известная функция. В частном случае, если эта температура равна нулю, краевое условие

$$U(0, t) = 0;$$

2) конец стержня $x = 0$ теплоизолирован, т. е. утечка теплоты в окружающую среду отсутствует

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0;$$

3) на конце стержня $x = 0$ происходит лучеиспускание теплоты в окружающую среду, температура которой меняется по заданному закону

$$U(0, t) + \alpha \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = \varphi(t),$$

где α — постоянная, $\varphi(t)$ — известная функция.

В частном случае, если температура внешней среды равна нулю, то

$$U(0, t) + \alpha \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0.$$

Аналогичные краевые условия могут быть найдены для конца $x = l$.

Рассмотрим распространение теплоты в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Задача заключается в нахождении решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{4.52}$$

при краевых условиях

$$U|_{x=0}=0, \quad U|_{x=l}=0 \tag{4.53}$$

и начальном условии

$$U|_{t=0}=f(x), \tag{4.54}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную и обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$, т. е. на концах стержня.

Ищем частные решения уравнения теплопроводности в виде

$$U(x, t)=X(x)T(t). \tag{4.55}$$

Подставляя зависимость (4.55) в уравнение теплопроводности (4.52), приходим к уравнению

$$X(x)T'(t)=a^2T(t)X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

откуда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{4.56}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{4.57}$$

Чтобы найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее граничным условиям (4.53), необходимо найти решение дифференциального уравнения (4.57), удовлетворяющее краевым условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{4.58}$$

Следовательно, отыскание функции $X(x)$ сводится к решению задачи о собственных значениях

$$\left.\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ &X(0)=0, \quad X(l)=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.59}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых существуют ненулевые решения дифференциального уравнения (4.57), удовлетворяющие краевым условиям (4.58). Это *задача Штурма — Лиувилля*.

Пусть $\lambda>0$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (4.57) имеет вид

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{4.60}$$

Учитывая краевые условия (4.58), получим

$$\left.\begin{aligned} &C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0, \\ &C_1\cos\sqrt{\lambda}l+C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

Из первого уравнения системы (4.61) имеем

$$C_1 = 0,$$

из второго —

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

Считаем $C_2 \neq 0$, так как в противном случае

$$X(x) \equiv 0.$$

Поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda}\, l = 0,$$

т. е.

$$\sqrt{\lambda}\, l = k\pi$$

(k — любое целое число),
откуда

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}.$$

Таким образом, ненулевые решения задачи (4.57) — (4.58) возможны при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \tag{4.62}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Этим собственным значениям соответствуют ненулевые решения задачи (4.59):

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{4.63}$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_k$ соответствуют решения дифференциального уравнения (4.56):

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}, \tag{4.64}$$

где a_k — произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$U_k(x, t) = X_k(x)\, T_k(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{4.65}$$

удовлетворяют уравнению теплопроводности (4.52) и краевым условиям (4.53) при любых постоянных a_n. Составим ряд

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{4.66}$$

Ввиду необходимости выполнения начального условия (4.54)

$$U(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{4.67}$$

Ряд (4.67) есть разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$.

Коэффициенты этого ряда

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{4.68}$$

2. Уравнение диффузии. *Диффузией* называется распространение вещества в какой-либо среде, обусловленное неодинаковостью в ней его концентрации и происходящее лишь за счет теплового движения молекул. В качестве примера рассмотрим явление диффузии соли в растворителе.

Пусть имеются два сообщающихся сосуда. В одном из них находится раствор соли, а в другом вода (рис. 48). Обозначим через S_x сечение сосуда, абсцисса которого x и через S_{x+dx} — сечение сосуда, абсцисса которого $x+dx$.

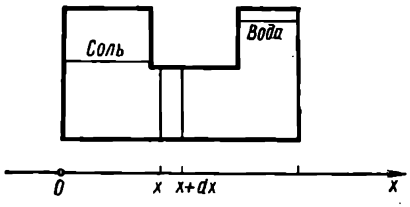


Рис. 48

Предположим, что за время dt количество соли, прошедшее через сечение S_x (площадь которого равна S), равно

$$-\nu S\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dt, \tag{4.69}$$

где Φ — концентрация раствора в сечении S_x, ν — постоянная величина (коэффициент диффузии). Тогда количество соли, вышедшее за время dt из сечения S_{x+dx}, таково:

$$\nu S\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dt + \nu S\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dx\,dt. \tag{4.70}$$

Следовательно, количество соли, заключенное в объеме раствора между сечениями S_x и S_{x+dx} равно

$$\nu S\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dx\,dt. \tag{4.71}$$

С другой стороны, это количество соли равно изменению концентрации раствора, т. е. величине

$$S\,dx\,d\Phi = S\,dx\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt. \tag{4.72}$$

Сравнивая соотношения (4.71) и (4.72), имеем

$$S\,dx\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,dt = \nu S\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dx\,dt, \tag{4.73}$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}. \tag{4.74}$$

Пусть $\nu = a^2$. Тогда дифференциальное уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \tag{4.75}$$

Уравнение (4.75) есть дифференциальное уравнение в частных производных. Это уравнение как и дифференциальное уравнение теплопроводности, приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям и решается аналогично.

Упражнения

Решить уравнение теплопроводности

$$U(x, t) = u(x)\, v(t),$$

если

$$\frac{\partial U(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial U(l, t)}{\partial x} = 0$$

(т. е. происходит распространение теплоты в стержне, концы которого теплоизолированы).

Отв. $U_k(x, t) = C_1 \cos \frac{k\pi x}{l} e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

§ 6. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

Поставим перед собой задачу вывести уравнение диффузии нейтронов в реакторе. Вследствие утечки нейтронов через поверхность реактора плотность нейтронов n (число нейтронов в 1 см^3) и поток $\varphi = nv$ (число нейтронов, пересекающих 1 см^2 поверхности в 1 с) не постоянны по объему реактора. Внутри реактора нейтроны испытывают большое число столкновений и эффективно накапливаются, образуя максимальную плотность в центре реактора. Приближаясь к поверхности, нейтроны с большой скоростью вылетают из реактора, что вызывает уменьшение плотности. Вне реактора, практически, поток нейтронов равен нулю.

Общее выражение величины теплового потока через единицу поверхности в среде с теплопроводностью k, в которой температура меняется от точки к точке, имеет вид

$$Q = -k \frac{dT}{dx}.$$

Знак минус указывает, что направление потока обратно направлению возрастания температуры. Если температура T убывает с ростом координаты x, то градиент $\frac{dT}{dx}$ отрицателен и поток идет в положительном направлении оси x.

Основной закон теории диффузии нейтронов формулируется так: результирующий поток нейтронов через поверхность обусловлен различием плотности нейтронов n или потока $\varphi = nv$ в соседних точках.

Нейтронный ток (или поток) через единицу поверхности

$$I = -D\frac{d\varphi}{dx} = -D\varphi',$$

где D — экспериментальный коэффициент диффузии, равный $\frac{\lambda_t}{3}$ (λ_t — транспортная длина свободного пробега).

Ток нейтронов направлен из области с большим потоком φ в область с меньшим потоком.

Пусть имеется такой настолько широкий и плоский реактор в форме плиты, что плотность нейтронов внутри него меняется только в одном направлении по оси x (рис. 49).

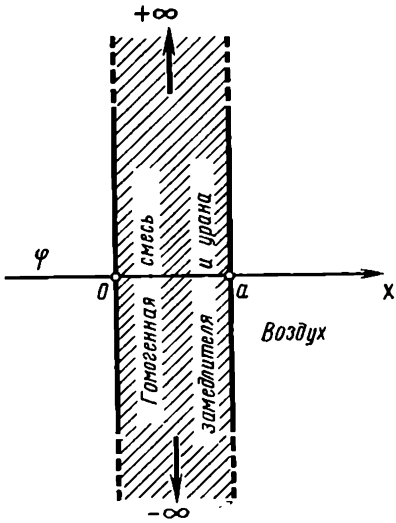


Рис. 49

Очевидно, что плотность нейтронов, а также поток φ будут максимальными в центре реактора и достаточно малыми у его краев.

Рассмотрим элемент среды в виде пластинки бесконечно малой толщины dx, площадь которой 1 см². Результирующий поток наружу из пластинки равен разности токов, проходящих через правую поверхность $I_{вых}$ и пронизывающих левую поверхность $I_{вход}$. Этот результирующий поток называется *утечкой нейтронов* из элемента объема материала реактора. Таким образом, утечка равна $I_{вых} - I_{вход}$. Значения токов через обе поверхности, выраженные через пространственные производные от потоков, есть соответственно $-D\varphi'_{x+dx}$ и $-D\varphi'_x$.

Пусть градиент в точке $x+dx$ представляется линейной функцией

$$\varphi'_{x+dx} = \varphi'_x + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)dx,$$

где $\frac{d\varphi'}{dx}$ — скорость изменения градиента с изменением координаты.

Тогда утечка (убыль) нейтронов из элемента объема толщины dx и единичной площади равна

$$I_{вых} - I_{вход} = -D(\varphi'_{x+dx} - \varphi'_x) = -D\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)dx =$$

$$= -D\left(\frac{d}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right)dx = -D\frac{d^2\varphi}{dx^2}dx.$$

Предполагается, что нейтрон движется по нормали к грани (на самом деле это движение беспорядочно) кубика материала реактора.

По отношению к влетающему нейтрону каждое ядро представляет собой некоторую площадку, величину которой обозначим через σ и

назовем *поперечным сечением*. Площадь всех ядер в 1 см³ равна $N\sigma$, где N — число атомов в единице объема. Это произведение обычно обозначается буквой Σ и называется *макроскопическим поперечным сечением*.

Скорость поглощения нейтронов равна $\Sigma\varphi$ (в единице объема) или $\Sigma\varphi\,dx$ (в тонкой пластинке).

В условиях стационарного процесса прибыль нейтронов равна их утечке плюс поглощение веществом. Тогда балансирующее равенство записывается в виде

$$f(x)\,dx = -D\frac{d^2\varphi}{dx^2}\,dx + \Sigma\varphi\,dx,$$

где $f(x)$ — число тепловых нейтронов, возникающих в каждую секунду в единице объема. Сокращая на dx, получаем искомое уравнение диффузии нейтронов

$$D\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \Sigma\varphi = -f(x).$$

ГЛАВА V

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем предполагать, что решение краевой задачи существует и оно единственно. Наша цель заключается в нахождении этого решения.

Точное решение краевой задачи возможно лишь в отдельных случаях. Поэтому рассмотрим приближенные методы решения краевых задач.

§ 1. СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧЕ КОШИ. СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть дана линейная краевая задача n-го порядка, состоящая в определении такой функции $y(x)$, которая удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению n-го порядка ($n \geqslant 2$)

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x) \tag{5.1}$$

или, если для краткости обозначить левую часть этого уравнения через $L(y)$, уравнению

$$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,y^{(\nu)} = f(x) \tag{5.1'}$$

и краевым условиям

$$R_\nu = \gamma_\nu \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{5.2}$$

где

$$R_\nu(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{\nu k} y^k(a) + \beta_{\nu k} y^{(k)}(b)].$$

Здесь $a_\nu(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции x на отрезке $[a, b]$; $\alpha_{\nu k}$, $\beta_{\nu k}$, γ_k — заданные постоянные.

Одним из методов решения линейных краевых задач является сведение их к задаче Коши. Рассмотрим сначала линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L(y) = f(x) \tag{5.3}$$

с краевыми условиями

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{5.4}$$

Можно найти решения y_1 и y_2 следующих задач с начальными условиями (т. е. задач Коши):

$$\begin{aligned} &\text{для } y_1 \text{ имеем } L(y_1) = f(x),\ y_1(a) = y_a,\ y_1'(a) = 0; \\ &\text{для } y_2 \text{ имеем } L(y_2) = 0,\ y_2(a) = 0,\ y_2'(a) = 1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

В результате решения каждой из задач Коши (5.5) для точки $x=b$ имеем два значения: $y_1(b)$ и $y_2(b)$.

Ввиду линейности задачи, решение дифференциального уравнения (5.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(a)=y_a, \quad y'(a)=y'_a,$$

записывается в виде

$$y=y_1(x)+y'_a y_2(x). \tag{5.6}$$

Из второго краевого условия (5.4), следует, что

$$y_b=y_1(b)+y'_a y_2(b). \tag{5.7}$$

Отсюда

$$y'_a=\frac{y_b-y_1(b)}{y_2(b)}. \tag{5.8}$$

Подставляя значение (5.8) в равенство (5.6), получаем искомое решение уравнения

$$y(x)=y_1(x)+\frac{y_b-y_1(b)}{y_2(b)}\,y_2(x). \tag{5.9}$$

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет общее решение

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)+y_{n+1}(x), \tag{5.10}$$

где $y_k(x)$ — частные линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения; $y_{n+1}(x)$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения; C_k — произвольные постоянные.

Для решения краевой задачи достаточно определить коэффициенты C_k, подчиняя $y(x)$ краевым условиям, которые могут быть и нелинейными. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ для определенности можно принять в виде решений задач с начальными условиями

$$L(y_k)=0, \quad y_k^{(\nu)}(a)=\begin{cases} 0 & \text{при } \nu\neq k-1, \\ 1 & \text{при } \nu=k-1. \end{cases}$$

Здесь $\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1$; $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Функция y_{n+1} определяется линейным неоднородным дифференциальным уравнением и однородными начальными условиями

$$L(y_{n+1})=f(x), \quad y_{n+1}^{(\nu)}(a)=0.$$

Пример 1. Найти решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=\varphi(x),$$

удовлетворяющего полным краевым условиям

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)&=\gamma_1,\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)&=\gamma_2.\end{aligned}\right\}$$

Здесь α_0, α_1, β_0, β_1, γ_1, γ_2 — заданные постоянные числа, причем $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$ и $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$.

Решение. Это неоднородная линейная краевая задача. Решение ищем в виде линейной комбинации

$$y=Cu(x)+v(x), \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная; $u=u(x)$ — ненулевое решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$u''+p(x)u'+q(x)u=0; \tag{2}$$

$v=v(x)$ — частное решение заданного неоднородного дифференциального уравнения

$$v''+p(x)v'+q(x)v=\varphi(x). \tag{3}$$

Совершенно очевидно, что функция y согласно соотношению (1) является решением заданного дифференциального уравнения. Потребуем, чтобы первое краевое условие выполнялось для функции y при любом C. Тогда, подставляя значение (1) в это краевое условие, имеем

$$C\alpha_0 u(a)+\alpha_0 v(a)+C\alpha_1 u'(a)+\alpha_1 v'(a)=\gamma_1,$$

или

$$C[\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)]+\alpha_0 v(a)+\alpha_1 v'(a)=\gamma_1. \tag{4}$$

Чтобы полученное равенство было справедливо для любого значения C, необходимо и достаточно обращение в нуль коэффициента при C, т. е. должны выполняться условия

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)&=0,\\ \alpha_0 v(a)+\alpha_1 v'(a)&=\gamma_1.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для выполнения равенств (5) достаточно, например, положить

$$u(a)=\alpha_1 m,\quad u'(a)=-\alpha_0 m, \tag{6}$$

где m — постоянная величина, отличная от нуля;

$$v(a)=\frac{\gamma_1}{\alpha_0},\quad v'(a)=0\ (\text{при } \alpha_0\neq 0) \tag{7}$$

и

$$v(a)=0,\quad v'(a)=\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\ (\text{при } \alpha_1\neq 0). \tag{8}$$

Очевидно, что u есть решение задачи Коши для однородного дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (6), а v — решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (7) или (8).

Функция $y = Cu(x) + v(x)$ удовлетворяет при любом C краевому условию при $x = a$. Выберем постоянную C так, чтобы функция y удовлетворяла данному краевому условию на конце $x = b$. Имеем

$$C[\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)] + [\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)] = \gamma_2,$$

откуда искомое значение

$$C = \frac{\gamma_2 - [\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)]}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)},$$

причем предполагается, что

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) \neq 0. \tag{9}$$

Итак, данная краевая задача сведена к двум задачам Коши для функции $u(x)$ и $v(x)$.

Выполнение условия (9) гарантирует единственное решение данной краевой задачи. При несоблюдении этого условия данная краевая задача совсем не имеет решений или имеет их бесчисленное множество.

Пример 2. Найти решение краевой задачи для линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0,$$

удовлетворяющего неоднородным краевым условиям

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y^1(a) = 0,$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2.$$

Решение. В силу условий (7) или (8) примера 1, имеем

$$v(a) = 0 \text{ и } v'(a) = 0,$$

следовательно,

$$v(x) \equiv 0.$$

Поэтому

$$y = Cu(x),$$

где $u(x)$ — решение дифференциального уравнения (2) примера 1, удовлетворяющее начальным условиям (6). Тогда

$$C = \frac{\gamma_2}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}.$$

Пример 3. Найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения

$$y'' + y \operatorname{ch} x = 0,$$

удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Решение. Сравним данные краевые условия с общими краевыми условиями примера 1. Здесь

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1.$$

Учитывая решение примера 2, решение данной краевой задачи ищем в виде

$$y = Cu(x).$$

Здесь $u(x)$ — решение однородного дифференциального уравнения

$$u'' + u \operatorname{ch} x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям (6) примера 1, причем $m = -1$, т. е.

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Из второго краевого условия имеем

$$Cu(1) = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{u(1)}.$$

Метод сведения двухточечной краевой задачи к задаче Коши требует ее решения на отрезке $[0,1]$.

Решаем методом Адамса задачу Коши

$$u'' + u \operatorname{ch} x = 0$$

при $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Выбираем шаг $h = 0{,}2$. Для определения начального отрезка воспользуемся методом степенных рядов. Допуская возможность разложения искомого интеграла дифференциального уравнения в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, запишем это разложение, сохраняя в нем первые четыре члена:

$$y \approx y_0 + y_0'(x - x_0) + y_0'' \frac{(x - x_0)^2}{2!} + y_0''' \frac{(x - x_0)^3}{3!}, \qquad (1)$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$, $y_0'' = y''(x_0)$, $y_0''' = y'''(x_0)$. Величина y_0 известна из начального условия, а из уравнения $y' = f(x, y)$ находим

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y) = f_1(x, y).$$

Далее имеем

$$y''' = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} y_1 = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} f(x, y) = f_2(x, y).$$

На основании зависимости (1) запишем

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f_1(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f_2(x_0, y_0)(x - x_0)^3. \qquad (2)$$

Подставляя в эту формулу значения x_1 и x_2, находим y_1 и y_2.

Так как по условию задачи

$$u'' = -u \operatorname{ch} x,$$

то

$$u''' = -(u \operatorname{sh} x + u' \operatorname{ch} x),$$
$$u^{IV} = -(u \operatorname{ch} x + 2u' \operatorname{sh} x + u'' \operatorname{ch} x),$$
$$u^{V} = -(u \operatorname{sh} x + 3u' \operatorname{ch} x + 3u'' \operatorname{sh} x + u''' \operatorname{ch} x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Используя начальные условия, находим

$$u_0 = 0,\ u_0' = 1,\ u_0'' = 0,\ u_0''' = -1,\ u_0^{IV} = 0,\ u_0^{V} = -2, \ldots .$$

Следовательно, на основании разложения функции u в ряд Маклорена

$$u = u_0 + u_0' x + \frac{1}{2!} u_0'' x^2 + \frac{1}{3!} u_0''' x^3 + \ldots,$$

получаем

$$u = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} + \ldots,$$

или после дифференцирования

$$u' = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \ldots .$$

Полагая $x_i = 0{,}2i$ $(i = -1,\ 0,\ 1,\ 2)$, из полученных разложений функции u и ее производной u' имеем

$$u_1 = -u_{-1} = 0{,}200 - 0{,}001 = 0{,}199;$$
$$u_1' = u_{-1}' = 1 - 0{,}020 = 0{,}980;$$
$$u_2 = 0{,}400 - 0{,}011 = 0{,}389;$$
$$u_2' = 1 - 0{,}080 - 0{,}002 = 0{,}918.$$

Вычисления проводим методом Адамса, используя формулы (6), (7) и (8) (без пересчета) в табулированном виде (табл. 7).

Таблица 7

i	x	u	Δu	u'	$\Delta u'$	ch x	u''	$\Delta u''$	$\Delta^2 u''$	$\Delta^3 u''$
−1	−0,2	−0,199		0,980		1,020	0,203			
0	0	0		1		1	0	−0,203	0	
1	0,2	0,199		0,980		1,020	−0,203	−0,203	−0,015	−0,015
2	0,4	0,389	0,174	0,918	−0,108	1,081	−0,421	−0,218	−0,028	−0,013
3	0,6	0,563	0,147	0,810	−0,161	1,185	−0,667	−0,246	−0,036	−0,008
4	0,8	0,710	0,109	0,649		1,337	−0,949	−0,282		
5	1,0	0,819								

Из табл. 7 следует, что

$$u(1)=0{,}819.$$

Поэтому

$$C=\frac{1}{0{,}819}=1{,}221.$$

Искомое решение имеет вид

$$y=1{,}221u(x).$$

Окончательные результаты вычислений этих значений сведены в табл. 8.

Таблица 8

x	$u(x)$	$y(x)=1{,}221\,u(x)$
0	0	0
0,2	0,199	0,243
0,4	0,389	0,475
0,6	0,563	0,687
0,8	0,710	0,867
1	0,819	1

§ 2. ЗАМЕНА ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ И СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ)

Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений может быть также получено методом замены производных приближенными конечно-разностными соотношениями.

Найдем решение $y(x)$ краевой задачи

$$L(y)\equiv\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu(x)\,y^{(\nu)}=f(x) \tag{5.11}$$

при n краевых условиях

$$R_\nu=\gamma_\nu,$$

где

$$R_\nu(y)=\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{\nu k}y^{(k)}(a)+\beta_{\nu k}y^{(k)}(b)]. \tag{5.12}$$

Здесь $a_\nu(x)$, $f(x)$ — заданные непрерывные функции x на отрезке $[a, b]$; $\alpha_{\nu k}$, $\beta_{\nu k}$, γ_ν — заданные постоянные.

Заданный отрезок $[a, b]$ разделим на n одинаковых частей длины $h=\frac{b-a}{n}$. Точки деления $x_i=x_0+ih$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$. Значения искомой функции в точках x_i есть $y(x_i)$. Приближенные значения этой функции в точках x_i обозначим через y_i. Производные, входящие

в уравнение (5.11), определим приближенно по значениям этих функций в отдельных точках. Эта задача может быть решена различными способами. Для приближенного вычисления значения производной функции $\varphi(x)$ в точке x_0 можно, выбрав число $h>0$, положить

$$\varphi'(x_0) \approx \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h},$$

или

$$\varphi'(x_0) \approx \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_0-h)}{h},$$

или

$$\varphi'(x_0) \approx \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0-h)}{2h}.$$

Каждое из этих выражений является некоторым приближением производной функции $\varphi(x)$ в точке x_0. Таким образом, производные заменяем разностными отношениями

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h} \approx \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \tag{5.13}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2} \approx \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}. \tag{5.14}$$

Для производной любого четного k-го порядка имеем

$$y^k(x_i) \approx \frac{1}{h^k}\Delta^k y_{i-\frac{k}{2}}, \tag{5.15}$$

а для любого нечетного k

$$y^k(x_i) \approx \frac{1}{2}\frac{1}{h^k}\left(\Delta^k y_{i-\frac{k+1}{2}}+\Delta^k y_{i-\frac{k-1}{2}}\right). \tag{5.16}$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (5.11) вместо производных соответствующие конечно-разностные отношения (5.15) и (5.16), получаем конечно-разностное уравнение.

Поступая аналогично с краевыми условиями, сводим решение краевой задачи к решению алгебраической системы уравнений относительно y_i.

Рассмотрим как частный случай линейное дифференциальное уравнение

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{5.17}$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)&=\gamma_1,\\ \beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)&=\gamma_2,\end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

причем

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0, \quad |\beta_0|+|\beta_1|\neq 0;$$

кроме того функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Краевую задачу (5.17)—(5.18) сведем к системе конечно-разностных уравнений.

Отрезок $[a, b]$ разбиваем на n равных частей длины $h=\frac{b-a}{n}$. Точки разбиения

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad x_0 = a,\ x_n = b.$$

Значения искомой функции $y=y(x)$ и ее производных $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$ в точках деления обозначим соответственно через $y_i=y(x_i)$, $y_i'=y'(x_i)$, $y_i''=y''(x_i)$, а также положим $p(x_i)=p_i$, $q(x_i)=q_i$ и $f(x_i)=f_i$.

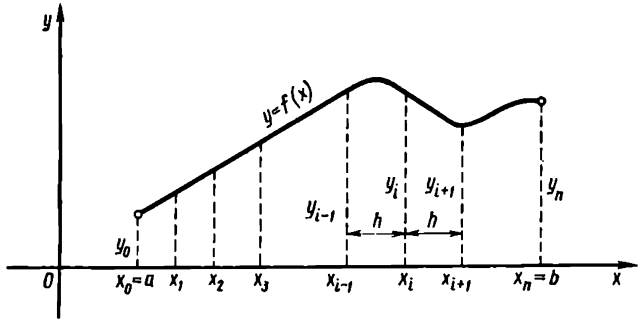


Рис. 50

Производные заменяем симметричными конечно-разностными отношениями для внутренних точек деления x_i отрезка $[a, b]$. Тогда (рис. 50) имеем

$$y_i' = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \tag{5.19}$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}, \tag{5.20}$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. На концах отрезка $x_0=a$ и $x_n=b$, чтобы не выходить за пределы данного отрезка $[a, b]$, положим

$$y_0' = \frac{y_1-y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_{n-1}-y_n}{-h}. \tag{5.21}$$

Если функция $y=y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения концевых ординат можно получить по формулам Милна:

$$y_0' = \frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h} \tag{5.22}$$

и

$$y_n' = \frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}, \quad (n \geqslant 2). \tag{5.23}$$

Используя формулы (5.19) и (5.20), дифференциальное уравнение (5.17) во внутренних точках деления x_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

$n-2$, $n-1$) приближенно можно заменить системой $n-1$ линейных конечно-разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i. \tag{5.24}$$

Отсюда после соответствующих преобразований получаем систему

$$y_{i+1}+B_iy_i+C_iy_{i-1}=F_ih^2, \tag{5.24'}$$

где для краткости положено

$$B_i=-\frac{2-q_ih^2}{1+\frac{p_i}{2}h},\quad C_i=\frac{1-\frac{p_i}{2}h}{1+\frac{p_i}{2}h},\quad F_i=\frac{f_i}{1+\frac{p_i}{2}h}.$$

Используя краевые условия (5.18) и соотношения (5.22) и (5.23), получаем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned}\alpha_0y_0+\alpha_1\frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}&=\gamma_1,\\ \beta_0y_n+\beta_1\frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}&=\gamma_2.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Итак, $n-1$ уравнений (5.24) и два уравнения (5.25) образуют систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, которые представляют значения искомой функции $y=y(x)$ в точках разбиения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Решая эту систему, можно составить таблицу значений искомой функции y. Если при достаточно большом n решение системы (5.24)—(5.25) трудоемко, то решение краевой задачи целесообразно свести к решению двух задач Коши (см. § 1 настоящей главы).

Приведение уравнения теплопроводности или диффузии к системе конечно-разностных уравнений

Рассмотрим приведенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2} \tag{5.26}$$

в области G изменения переменных: $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t<+\infty$. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ задано распределение температуры

$$U(x,\ 0)=f(x) \tag{5.27}$$

и известны законы изменения температуры в зависимости от времени (тепловые режимы) на концах стержня $x=0$ и $x=l$:

$$U(0,\ t)=\varphi(t),\ U(l,\ t)=\psi(t). \tag{5.28}$$

Поставим задачу найти распределение температуры

$$U = U(x,\ t)$$

вдоль стержня в любой момент времени t.

Приведем эту краевую задачу к системе конечно-разностных уравнений. Поставим в области G прямоугольную сетку (рис. 51)

$$x_i = ih,\ t_j = jk\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $h = \frac{l}{n}$ (n — целое число) — шаг вдоль оси Ox; k — некоторая положительная величина. Для краткости положим

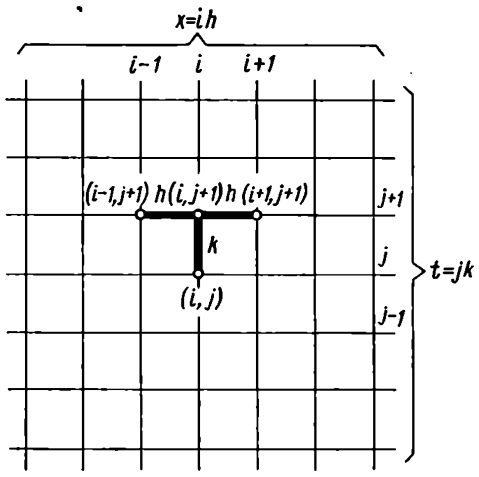


Рис. 51

$$u(ih,\ jk) = u(x_i,\ t_j) = u_{i,j}.$$

Используя приближенную симметричную формулу для второй производной по x

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{(x_i, t_j)} \approx \frac{u_{i-1,\,j} - 2u_{i,\,j} + u_{i+1,\,j}}{h^2} \tag{5.29}$$

и применяя формулу приближенного дифференцирования по t назад

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{(x_i,\ t_j)} \approx \frac{u_{i,\,j+1} - u_{ij}}{k} \tag{5.30}$$

для $(j+1)$-го слоя сетки, вместо дифференциального уравнения теплопроводности в каком-либо узле $(x_i,\ t_j)$ сетки получаем

$$\frac{u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j}}{k} = \frac{u_{i-1,\,j+1} - 2u_{i,\,j+1} + u_{i+1,\,j+1}}{h^2} + O(l + h^2). \tag{5.31}$$

Отбрасывая погрешность аппроксимации $O(l + h^2)$ как малую величину, имеем

$$\frac{u_{i-1,\,j+1} - 2u_{i,\,j+1} + u_{i+1,\,j+1}}{h^2} = \frac{u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j}}{k},$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

или

$$u_{i-1,\,j+1} - \left(2 + \frac{h^2}{k}\right) u_{i,\,j+1} + u_{i+1,\,j+1} = -\frac{h^2}{k} u_{i,\,j}.$$

Полагая $\frac{h^2}{k} = s$, получаем

$$u_{i-1,\,j+1} - (2+s)\, u_{i,\,j+1} + u_{i+1,\,j+1} = -s u_{i,\,j}. \tag{5.32}$$

Из начального условия (5.27) имеем

$$u_{i,\,0} = f(ih) = f(x_i). \tag{5.33}$$

Краевые условия (5.28) заменяют соотношениями

$$u_{0,\,j+1} = \varphi(t_{j+1}),\quad u_{n,\,j+1} = \psi(t_{j+1}). \tag{5.34}$$

Таким образом, краевая задача (5.26)—(5.28) приводится к системе конечно-разностных уравнений (5.32)—(5.34). Чисто алгебраическая задача (5.32)—(5.34) является приближением к данной краевой задаче (5.26)—(5.28).

Точное решение $u_{i,\,j}$ задачи (5.32)—(5.34) будет, вообще говоря, близким к искомому решению $U_{i,\,j}$ краевой задачи (5.26)—(5.28). Основное уравнение (5.32) конечно-разностной задачи (5.32)—(5.34) можно представить также в виде

$$u_{i+1,\,j+1} - \left(\frac{2k+h^2}{k}\right) u_{i,\,j+1} + u_{i-1,\,j+1} = -\frac{h^2}{k}\, u_{i,\,j},$$

откуда

$$ku_{i+1,\,j+1} - (2k+h^2)\, u_{i,\,j+1} + ku_{i-1,\,j+1} = -h^2 u_{i,\,j}.$$

Обозначая для краткости и симметрии записи

$$-u_{i,\,j} = F_i,\quad 2k+h^2 = b_i,\quad k = a_i = c_i,\quad u_{i\pm1,\,j+1} = u_{i\pm1},\quad u_{i,\,j+1} = u_i,$$

получаем эквивалентную систему алгебраических уравнений

$$a_i u_{i+1} - b_i u_i + c_i u_{i-1} = h^2 F_i. \tag{5.35}$$

Уравнение диффузии приводится к системе (5.32) — (5.34) или к системе (5.35), (5.33) и (5.34) аналогичным путем.

Пример. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения

$$y'' + x^2 y + 2 = 0$$

при следующих краевых условиях:

$$y(-1) = 0,\quad y(1) = 0.$$

Решение. Разобьем интервал $(-1,\ 1)$ на четыре части длины

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ввиду симметрии задачи и данных краевых условий

$$y_{-2} = y_2 = 0,\quad y_{-1} = y_1.$$

Поэтому задача сводится к нахождению двух неизвестных величин y_0 и y_1. Разностные уравнения для заданного дифференциального уравнения имеют вид:

для $x = 0$ $\qquad \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_1}{h^2} + 2 = 0,$

для $x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{0 - 2y_1 + y_0}{h^2} + \dfrac{1}{4} y_1 + 2 = 0.$

Так как $h=\frac{1}{2}$, т.е. $h^2=\frac{1}{4}$, то получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4y_1-8y_0+4y_1+2=0,\\ -8y_1+4y_0+\tfrac{1}{4}y_1+2=0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 4y_0-4y_1=1,\\ 4y_0-\tfrac{31}{4}y_1=-2,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$y_0=1{,}05,\quad y_1=0{,}8.$$

§ 3. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Решим методом факторизации краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+q(x)y=f(x) \tag{5.36}$$

при краевых условиях

$$\left.\begin{aligned} y'(a)+\alpha y(a)=\gamma_1,\\ y'(b)+\beta y(b)=\gamma_2.\end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Применяя символ дифференциального оператора, уравнение (5.36) запишем в виде

$$[D^2+q(x)]\,y=f(x). \tag{5.38}$$

Оператор в левой части равенства (5.38) представим в виде произведения двух линейных множителей первого порядка

$$[D+r(x)]\cdot[D+s(x)]\,y=f(x). \tag{5.39}$$

Поскольку правые части равенств (5.38) и (5.39) одинаковые, то приравнивая их левые части и раскрывая скобки в равенстве (5.39), получаем

$$D\,[D+s(x)]\,y+r(x)\,[D+s(x)]\,y=[D^2+q(x)]\,y,$$

или

$$D^2y+D\,[s(x)\cdot y]+r(x)\,[Dy+s(x)\cdot y]=D^2y+q(x)y,$$

откуда

$$D^2y+Ds(x)\cdot y+s(x)\cdot Dy+r(x)\cdot Dy+r(x)\cdot s(x)\cdot y=D^2y+q(x)y.$$

Группируя подобные члены, имеем

$$D^2y+[r(x)+s(x)]\,Dy+[Ds(x)+r(x)\,s(x)]\,y=D^2y+0\cdot Dy+q(x)\,y.$$

Приравнивая соответствующие члены в левой и правой частях последнего равенства, получаем

$$r(x)+s(x)=0 \tag{5.40}$$

и

$$Ds(x)+r(x)\,s(x)=q(x). \tag{5.41}$$

Пусть теперь

$$[D+s(x)]\,y=v(x). \tag{5.42}$$

Подставляя зависимость (5.42) в равенство (5.39), приходим к уравнению

$$[D+r(x)]\,v(x)=f(x). \tag{5.43}$$

Из уравнения (5.40) следует, что

$$r(x)=-s(x). \tag{5.40'}$$

Тогда соотношения (5.41), (5.43) и (5.42), принимая во внимание соотношение $D\equiv\frac{d}{dx}$, можно записать в виде

$$\frac{ds(x)}{dx}-s^2(x)=q(x); \tag{5.44}$$

$$\frac{dv(x)}{dx}-s(x)\,v(x)=f(x); \tag{5.45}$$

$$\frac{dy(x)}{dx}+s(x)\,y(x)=v(x). \tag{5.46}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение второго порядка (5.36) сведено к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка (двум линейным дифференциальным уравнениям (5.45), (5.46) и нелинейному дифференциальному уравнению (5.44), которое является уравнением Риккати). Дифференциальное уравнение (5.44) с помощью подстановки

$$s=-\frac{y'}{y}, \tag{5.47}$$

или

$$\frac{ds}{dx}=-\left(\frac{y''y-y'y'}{y^2}\right)=\frac{y'^2-y''y}{y^2},$$

откуда

$$s^2=\frac{y'^2}{y^2},$$

приводится к уравнению

$$\frac{y'^2-y''y}{y^2}-\frac{y'^2}{y^2}=q(x),$$

или

$$-\frac{y''}{y}=q(x),$$

откуда

$$y''+q(x)\,y=0,$$

т. е. к эквивалентному однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\,y = 0. \tag{5.48}$$

Краевые условия (5.37) имеют такой же вид как для уравнения (5.46). Таким образом, краевые условия будут удовлетворены в точке $x = a$, если принять

$$s(a) = \alpha,\ v(a) = \gamma_1. \tag{5.49}$$

Методом конечных разностей дифференциальные уравнения (5.44) и (5.45) интегрируются затем на отрезке от $x = a$ до $x = b$ и при $x = b$ получаются значения $s(b)$ и $v(b)$. Из дифференциального уравнения (5.46), находим

$$\frac{dy(x)}{dx} = v(x) - s(x)\,y(x),$$

откуда при $x = b$ получаем

$$\frac{dy(b)}{dx} = v(b) - s(b)\,y(b).$$

Подставляя это равенство во второе из уравнений (5.37), получаем

$$v(b) - s(b)\,y(b) + \beta y(b) = \gamma_2$$

и

$$v(b) - \gamma_2 = [s(b) - \beta]\,y(b),$$

откуда находим значение функции в точке $x = b$:

$$y(b) = \frac{v(b) - \gamma_2}{s(b) - \beta}. \tag{5.50}$$

Таким образом, получаем краевые условия для интегрирования дифференциального уравнения (5.46) от $x = a$ до $x = b$ и искомое решение.

Если краевые условия таковы:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_a \text{ в точке } x = a, \\ y &= y_b \text{ в точке } x = b, \end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

то необходим другой подход к числовому решению задачи, так как для соответствующего решения уравнения Риккати функция $s(x)$ является не связанной с точкой $x = a$. Пусть

$$s(x) = \frac{1}{S(x)},\quad v(x) = \frac{V(x)}{S(x)} \text{ и } y(x) = S(x)\,Y(x) + V(x). \tag{5.52}$$

Подставляя эти величины в систему дифференциальных уравнений (5.44), (5.45) и (5.46), приходим к уравнениям

$$\frac{dS(x)}{dx} + q(x)\,S^2(x) = -1, \tag{5.53}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} + S(x)\,q(x)\,V(x) = S(x)\,f(x), \tag{5.54}$$

$$\frac{dY(x)}{dx} - S(x)\,q(x)\,Y(x) = q(x)\,V(x) - f(x). \tag{5.55}$$

Краевые условия удовлетворяются в точке $x=a$, если

$$S(a)=0,\ V(a)=y_a. \tag{5.56}$$

Дифференциальные уравнения (5.53) и (5.54) можно теперь интегрировать от $x=a$ до $x=b$. Тогда, зная $V(b)$ и $S(b)$, из последнего уравнения (5.52), находим

$$Y(b)=\frac{y_b-V(b)}{S(b)}. \tag{5.57}$$

Таким образом, получаем краевые условия, необходимые для начала интегрирования дифференциального уравнения (5.55) в точке $x=b$ и искомое решение.

§ 4. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

Расширим понятие оператора. *Оператором* называется символ, стоящий перед функцией и указывающий совокупность выполнения некоторых действий над функцией с целью получения новой функции.

Пусть дан некоторый класс (множество) функций

$$K=\{y(x)\},$$

где x — независимая переменная (или совокупность нескольких независимых переменных).

Говорят, что на множестве $K=\{y(x)\}$ определен оператор L, если каждой функции $y(x)$, принадлежащей этому множеству, по некоторому закону соответствует одна и только одна функция $z=z(x)$. Так, если $K=\{y(x)\}$ представляет множество дифференцируемых функций, то операцию $\frac{d}{dx}$ взятия производной можно рассматривать как оператор дифференцирования

$$y'(x)=\frac{d}{dx}y(x). \tag{5.58}$$

В более общем случае, если $p_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$ и $y=y(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция со своими n последующими производными, то

$$z=L(y)\equiv p_0(x)\,y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y \tag{5.59}$$

есть линейный дифференциальный оператор, определенный на множестве K непрерывно дифференцируемых функций вместе со своими n последовательными производными и значениями непрерывных функций z, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

На самом деле, для каждой допустимой функции y результат выполнения операций (5.59) есть некоторая непрерывная функция z. Например, если $L(y)=y''+y$, $L(2)=2$, $L(x)=x$, $L(x^3)=6x+x^3$ и т. д. Оператор L называется *линейным*, если он определен на

линейном множестве * и для любой пары допустимых функций u и v их линейная комбинация ** $\alpha u+\beta v$ (α и β — произвольные постоянные) является также допустимой функцией, причем выполняются условия:

$$L(\alpha u)=\alpha L(u),$$
$$L(u+v)=L(u)+L(v).$$

Отсюда следует, что

$$L(\alpha u+\beta v)=\alpha L(u)+\beta L(v).$$

Легко видеть, что операторы $\frac{d}{dx}y$, $L(y)$ являются линейными.

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля на примере дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx}D\frac{d\varphi}{dx}+(\lambda-\Sigma)\varphi=0, \tag{5.60}$$

где λ — параметр, D и Σ — кусочно-гладкие функции ($\Sigma\geqslant 0$). Дифференциальное уравнение (5.60) рассмотрим совместно с краевыми условиями

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0. \tag{5.61}$$

Следовательно, область G состоит из отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$, а граница S — из двух краевых точек $x=0$ и $x=1$. Задача состоит в нахождении значений λ, при которых существуют ненулевые решения дифференциального уравнения (5.60), непрерывные в области G вплоть до границы S вместе с потоком $D\frac{d\varphi}{dx}$ и кусочно-непрерывной функцией $\frac{d}{dx}D\frac{d\varphi}{dx}$, удовлетворяющие условиям (5.61). Рассмотрим оператор

$$L=\frac{d}{dx}D\frac{d}{dx}+(\lambda-\Sigma). \tag{5.62}$$

Введем в рассмотрение множество функций $\{y(x)\}$, на которые действует оператор L, непрерывных вместе с потоком $D\frac{dy(x)}{dx}$, кусочно-непрерывной производной от потока $\frac{d}{dx}D\frac{dy(x)}{dx}$ и удовлетворяющих условиям

$$y(0)=y(1)=0. \tag{5.63}$$

Заметим, что для элементов множества $\{y(x)\}$ имеет место соотношение

$$Ly(x)\neq 0.$$

---

* *Множеством* называется совокупность каких-либо объектов (например, уравнений, функций и т. п.). *Линейным множеством* называется совокупность линейных объектов (например, линейных дифференциальных уравнений).

** *Линейной комбинацией* функций называется всякая функция, которую можно получить из данных функций умножением каждой из них на некоторый множитель и последующим сложением их.

Равенство нулю возможно в случае, если $y(x)$ является решением дифференциального уравнения (5.60).

Для решения уравнений диффузии можно использовать *метод факторизации*. Сущность этого метода заключается в разложении дифференциального оператора диффузии Штурма — Лиувилля на более простые операторы первого порядка. Такое разложение приводит к системе уравнений первого порядка, эквивалентной уравнению диффузии.

Уравнение диффузии нейтронов для однородной плоской области $G(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ имеет вид

$$D\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \Sigma\varphi = -f(x). \tag{5.64}$$

Если функции D, Σ и f симметричны относительно точки $x=0$ и на внешней границе поток равен нулю, то краевые условия таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 0 \quad \text{при } x=0, \\ \varphi &= 0 \quad \text{при } x=1. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Требуется найти решение краевой задачи (5.64) — (5.65) в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Рассмотрим оператор

$$\tilde{L} = D\frac{d^2}{dx^2} - \Sigma.$$

Представим его в виде произведения двух операторов первого порядка:

$$\tilde{L} = D\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right),$$

где α и β — функции от x, определяемые из условия

$$D\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right) \equiv D\frac{d^2}{dx^2} - \Sigma. \tag{5.66}$$

Тогда уравнение диффузии (5.64), применяя обозначение дифференциального оператора, можно записать в виде

$$\left(D\frac{d^2}{dx^2} - \Sigma\right)\varphi = -f(x), \tag{5.67}$$

или учитывая равенство (5.66), т. е. применяя факторизованный оператор, в виде

$$D\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\varphi = -f(x). \tag{5.68}$$

Приравнивая левые части равенств (5.67) и (5.68), имеем

$$D\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\varphi = \left(D\frac{d^2}{dx^2} - \Sigma\right)\varphi.$$

Раскрывая скобки и выполняя дифференцирование, получаем

$$D\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\varphi+D\beta\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\varphi=D\frac{d^2}{dx^2}\varphi-\Sigma\varphi,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\varphi+\beta\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{\Sigma}{D}\varphi,$$

откуда

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d}{dx}(\alpha\varphi)+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\beta\alpha\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{\Sigma}{D}\varphi$$

и

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\alpha}{dx}\varphi-\alpha\frac{d\varphi}{dx}+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\beta\alpha\varphi=\frac{d_2\varphi}{dx^2}-\frac{\Sigma}{D}\varphi.$$

Группируя члены в левой части равенства, имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(\beta-\alpha)\frac{d\varphi}{dx}-\left(\frac{d\alpha}{dx}+\beta\alpha\right)\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+0\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\Sigma}{D}\varphi.$$

Приравнивая соответствующие члены в обеих частях последнего равенства, получаем систему условий

$$\beta-\alpha=0, \tag{5.69}$$

$$\frac{d\alpha}{dx}+\beta\alpha=\frac{\Sigma}{D}. \tag{5.70}$$

Из равенства (5.69) следует, что

$$\alpha=\beta, \tag{5.71}$$

а из равенства (5.70), учитывая соотношение (5.71), имеем

$$\frac{d\beta}{dx}+\beta^2=\frac{\Sigma}{D}. \tag{5.72}$$

Итак, для выполнения тождества (5.66), т. е. для факторизации оператора достаточно потребовать соблюдение условий (5.71) и (5.72).

Введем новую функцию z с помощью соотношения

$$\frac{d\varphi}{dx}-\beta\varphi=-z. \tag{5.72'}$$

Разделим уравнение (5.64) на D:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{\Sigma}{D}\varphi=-\frac{f}{D}. \tag{5.73}$$

Продифференцировав функцию (5.72'), имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\beta}{dx}\varphi-\beta\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{dz}{dx},$$

откуда

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d\beta}{dx}\varphi+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dz}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (5.73), получаем

$$\frac{d\beta}{dx}\varphi+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dz}{dx}-\frac{\Sigma}{D}\varphi=-\frac{f}{D},$$

или

$$\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{\Sigma}{D}\right)\varphi+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dz}{dx}=-\frac{f}{D}.$$

Выражение в скобках, согласно зависимости (5.71), равно $-\beta^2$, поэтому

$$-\beta^2\varphi+\beta\frac{d\varphi}{dx}-\frac{dz}{dx}=-\frac{f}{D},$$

или

$$\beta\left(\frac{d\varphi}{dx}-\beta\varphi\right)-\frac{dz}{dx}=-\frac{f}{D}.$$

Учитывая соотношение (5.72′), перепишем последнее равенство в виде

$$-\beta z-\frac{dz}{dx}=-\frac{f}{D},$$

или

$$\frac{dz}{dx}+\beta z=\frac{f}{D}. \tag{5.74}$$

Итак, уравнение диффузии сводится к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка (5.72), (5.72′) и (5.74):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\beta}{dx}+\beta^2&=\frac{\Sigma}{D},\\ \frac{dz}{dx}+\beta z&=\frac{f}{D},\\ \frac{d\varphi}{dx}-\beta\varphi&=-z.\end{aligned}\right\} \tag{5.75}$$

Система (5.75) называется *факторизованной* системой. Краевые условия задачи образуем из условий (5.65) и третьего из равенств (5.75). Очевидно, что условия (5.65) будут удовлетворяться, если принять

$$\left.\begin{aligned}\beta(0)&=0,\\ z(0)&=0,\\ \varphi(1)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.76}$$

Итак, получена эквивалентная задача (5.75)—(5.76), которая может быть решена последовательно, т. е. находится функция $\beta(x)$, затем функция $z(x)$ и, наконец, функция $\varphi(x)$. Система (5.75)—(5.76) может быть решена приближенно с помощью конечно-разностного метода.

§ 5. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Точное решение дифференциального уравнения диффузии и теплопроводности сопряжено с большими вычислительными трудностями. Поэтому появляется необходимость использования для решения подобных задач приближенных методов. Наиболее удобным из них оказался метод конечных разностей (§ 2).

В результате применения метода конечных разностей дифференциальное уравнение теплопроводности или диффузии заменяется трехчленным конечно-разностным уравнением диффузии для одномерных областей

$$a_i\varphi_{i+1} - b_i\varphi_i + c_i\varphi_{i-1} = -F_i, \tag{5.77}$$

где a_i, b_i, c_i, F_i — заданные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_i + c_i \leqslant b_i.$$

Непосредственное решение конечно-разностных уравнений второго порядка с помощью обычных алгебраических методов затрудняется в результате быстрого накопления ошибок округления, которые нарастают от узла к узлу экспоненциально.

Трудности решения одномерных конечно-разностных уравнений диффузионного типа были преодолены с помощью специального эффективного метода, получившего название *метода разностной факторизации* (или *метода прогонки*). Сущность метода факторизации состоит в том, что решение конечно-разностных уравнений второго порядка (5.77) сводится к последовательному решению трех конечно-разностных уравнений первого порядка.

Обобщая сказанное, отметим, что при применении метода конечных разностей к краевым задачам дифференциальных уравнений второго порядка получается аналогичная конечно-разностному уравнению диффузии (5.77) (после почленного его деления на a_i) система конечно-разностных уравнений вида

$$y_{i+1} + B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i h^2, \tag{5.78}$$

в которой каждое уравнение содержит три неизвестных

$$y_{i+1},\ y_i,\ y_{i-1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь B_i, C_i, $F_i h^2$ — заданные числа; y_i — искомая функция при определенных краевых условиях.

Решим уравнение (5.78) относительно y_i. В итоге получаем

$$y_i = \frac{F_i}{B_i} h^2 - \frac{1}{B_i} y_{i+1} - \frac{C_i}{B_i} y_{i-1}. \tag{5.79}$$

Предположим, что полная система алгебраических уравнений (5.24′) и (5.25) разрешена относительно неизвестной y_{i-1}. Пусть

$$y_{i-1} = A_i y_{i+1} + D_i y_i, \tag{5.80}$$

т.е. y_{i-1} является, в общем случае, функцией остальных неизвестных, а A_i, D_i — соответствующие коэффициенты, полученные в результате решения полной системы уравнений. Подставим выражение (5.80) в уравнение (5.79). Тогда имеем

$$y_i = \frac{F_i}{B_i} h^2 - \frac{1}{B_i} y_{i+1} - \frac{C_i}{B_i} (A_i y_{i+1} + D_i y_i),$$

откуда

$$y_i \left(1 + \frac{C_i D_i}{B_i}\right) = \frac{F_i}{B_i} h^2 - \left(\frac{1}{B_i} + \frac{C_i A_i}{B_i}\right) y_{i+1}$$

и

$$y_i = \frac{F_i h^2}{B_i + C_i D_i} - \frac{1 + A_i C_i}{B_i + C_i D_i} y_{i+1}. \qquad (5.79')$$

Обозначая ради краткости

$$\frac{F_i h^2}{B_i + C_i D_i} = d_i', \qquad \frac{1 + A_i C_i}{B_i + C_i D_i} = c_i,$$

получаем

$$y_i = d_i' - c_i y_{i+1} = c_i \left(\frac{d_i'}{c_i} - y_{i+1}\right). \qquad (5.79'')$$

Пусть в равенстве (5.79″)

$$\frac{d_i'}{c_i} = d_i.$$

Тогда исходную систему (5.79) можно представить в виде произведения, т.е., иначе, она принимает факторизованный вид

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), \qquad (5.81)$$

где c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — некоторые коэффициенты.

Из равенства (5.81), изменяя лишь индекс, имеем

$$y_{i-1} = c_{i-1} (d_{i-1} - y_i). \qquad (5.81')$$

Подставляя выражение (5.81′) в уравнение (5.24′), получаем

$$y_{i+1} + B_i y_i + C_i c_{i-1} (d_{i-1} - y_i) = F_i h^2.$$

Разрешая это равенство относительно y_i, находим

$$y_i = \frac{(F_i h^2 - C_i c_{i-1} d_{i-1}) - y_{i+1}}{B_i - C_i c_{i-1}}. \qquad (5.82)$$

Коэффициенты c_i и d_i определяются рекуррентными формулами, которые получаются в результате сравнения зависимостей (5.81) и (5.82):

$$c_i = \frac{1}{B_i - C_i c_{i-1}}, \quad d_i = F_i h^2 - C_i c_{i-1} d_{i-1}. \qquad (5.83)$$

Здесь $i = 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$. Определим значения c_0 и d_0.

Из первого краевого условия (5.25) имеем

$$y_0 = \frac{\gamma_1 h - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}. \qquad (5.84)$$

С другой стороны, при $i=0$ из равенства (5.81) имеем

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1). \tag{5.85}$$

Сравнивая равенства (5.84) и (5.85), получаем

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{\gamma_1 h}{\alpha_1}. \tag{5.86}$$

По формулам (5.83) и (5.86) последовательно определяем коэффициенты c_i, d_i до значений c_{n-1} и d_{n-1} включительно.

Обратный ход начинается с определения величины y_n. На основании второго краевого условия (5.25) и соотношения (5.81) при $i=n-1$ получаем алгебраическую систему

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} &= \gamma_2, \\ y_{n-1} &= c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

Решим систему (5.87) относительно y_n:

$$y_n = \frac{\gamma_2 h + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 (c_{n-1} + 1)}. \tag{5.88}$$

Затем, используя соотношение (5.81), последовательно определяем y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_1, y_0.

Для контроля проверяется выполнение первого из краевых условий (5.25).

Метод факторизации обладает устойчивым алгоритмом. Ошибки от округления не влияют на погрешность решения. Основные достоинства метода факторизации состоят в следующем:

1) ошибки, возникающие при реализации вычислительного алгоритма, представляются в виде ошибок коэффициентов исходной задачи;

2) вместо краевых задач решаются соответствующие задачи Коши.

В случае, когда требуется повышенная точность вычислений, метод факторизации позволяет получить более точные результаты, если при переходе от краевых условий к конечно-разностным соотношениям использовать трехчленные формулы для производных в граничных точках $x=a$ и $x=b$:

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

Пример. Методом факторизации конечно-разностных уравнений решить краевую задачу

$$y'' = x + y;$$
$$y(0) = 0, \ y(1) = 0.$$

Решение. Выберем шаг $h=0{,}1$. От данной краевой задачи перейдем к соответствующим конечно-разностным уравнениям:

$$y_{i+1} + B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i h^2,$$

где $i=1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$; $y_0=0$, $y_{10}=0$. Здесь $B_i=-2-h^2$, $C_i=1$, $F_i=x_i=ih$.

Данные краевые условия являются условиями простейшего типа $y(a)=\gamma_1$, $y(b)=\gamma_2$. Для этих условий формулы определения величин c_0, d_0, y_0 и y_n заметно упрощаются. Полагая, согласно условиям краевой задачи, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=0$ и $\beta_0=1$, $\beta_1=0$ из соотношений (5.86), имеем

$$c_0=0,\ d_0=\infty,\ c_0d_0=\gamma_1.$$

Тогда

$$c_1=\frac{1}{B_1},\ d_1=F_1h^2-C_1\gamma_1,$$

причем $y_n=\gamma_2$, $y_0=\gamma_1$. Следовательно,

$$c_1=-\frac{1}{-2-0{,}1^2}=-\frac{1}{2{,}01}=-0{,}498,$$
$$d_1=h\cdot h^2-1\cdot 0=h^3=0{,}1^3=0{,}001.$$

Используя рекуррентные формулы (5.83) и учитывая условия задачи, получим

$$c_i=\frac{1}{-2-h^2-c_{i-1}},\ d_i=ih^3-c_{i-1}d_{i-1},$$

где $i=1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$ (т. е. 1, 2, 3, ..., 8, 9). Значения c_i и d_i, вычисленные по этим формулам, приводятся в первых двух столбцах табл. 9.

На основании зависимости (5.81) и заданного значения $y_{10}=0$, вычисляем последовательно величины y_9, y_8, y_7, ..., y_2, y_1.

В последнем столбце таблицы для сравнения результатов приведены значения точного решения

$$y_{\text{точн}}=\frac{2e}{e^2-1}\operatorname{sh}x-x.$$

Таблица 9

i	c_i	d_i	y_i	$y_{\text{точн}}$
0	0		0	0
1	—0,498	0,001	—0,025	—0,015
2	—0,662	0,002	—0,049	—0,029
3	—0,878	0,004	—0,072	—0,041
4	—0,890	0,008	—0,078	—0,050
5	—0,900	0,012	—0,081	—0,057
6	—0,908	0,016	—0,078	—0,058
7	—0,915	0,022	—0,070	—0,054
8	—0,921	0,028	—0,055	—0,044
9	—0,926	0,035	—0,032	—0,026
10			0	0

§ 6. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ. МАТРИЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система n алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \tag{5.89}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \tag{5.89'}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

В матричном виде система линейных уравнений (5.89) записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{5.90}$$

где $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица коэффициентов системы; $\boldsymbol{x}$ — матрица-столбец неизвестных; $\boldsymbol{b}$ — матрица-столбец свободных членов.

Здесь

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Матричное уравнение (5.90), описывающее систему линейных алгебраических уравнений, решим методом матричной факторизации.

Предположим, что квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ может быть представлена в виде произведения двух матриц $\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{R}$, в котором $\boldsymbol{K}$ является нижней (левой) треугольной матрицей, а $\boldsymbol{R}$ — верхней (правой) треугольной матрицей. При такой факторизации диагональные элементы одной из матриц $\boldsymbol{K}$ или $\boldsymbol{R}$ (но не обеих) могут быть единицами. Задача состоит в факторизации квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{R}. \tag{5. 91}$$

Для широкого класса матриц возможно решение матричного уравнения (5.90) путем факторизации (5.91), где матрицы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{R}$ имеют вид

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{31} & k_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \ldots & r_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5.92}$$

причем, все диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{R}$ $r_{ii} \neq 0$.

Такая факторизация возможна не всегда, однако, если возможна, то дает более быстрое решение уравнения (5.90), чем другие общие методы.

Треугольные матрицы имеют ряд удобных для использования свойств: определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, произведение двух треугольных матриц одинаковой структуры есть треугольная матрица той же структуры и т. д. Условия факторизации квадратной матрицы A определяются следующей теоремой.

Теорема. *Квадратная матрица A может быть факторизована в виде $A = KR$, где K — нижняя (левая) треугольная матрица с единицами по главной диагонали, а R — верхняя (правая) треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, тогда и только тогда, если*

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.93}$$

Кроме того, если возможна факторизация $A = KR$, то она единственна.

Доказательство. Докажем единственность факторизации. Обозначим через $r_{(i)}$ i-ю строку матрицы R, а через $k_{(j)}$ j-й столбец матрицы K; аналогично обозначим строки и столбцы матрицы A.

Если $A = KR$, где матрицы K и R имеют вид (5.92), то в этом случае строки произведения таковы:

$$a_{(1)} = r_{(1)}, \; a_{(2)} = k_{21} r_{(1)} + r_{(2)}, \; \ldots, \; a_{(n)} = \sum_{l=1}^{n-1} k_{nl} r_{(l)} + r_{(n)}. \tag{5.94}$$

Столбцы матрицы $A = KR$, за исключением последнего, имеют вид

$$a^1 = r_{11} k^1, \; a^2 = r_{12} k^1 + r_{22} k^2, \; \ldots, \; a^{n-1} = \sum_{l=1}^{n-2} r_{l,\, n-1} k^l + r_{n-1,\, n-1} k^{n-1}. \tag{5.95}$$

Так как по условию все диагональные элементы матрицы R $r_{jj} \neq 0$, то можем рекурсивно решить уравнения (5.94) и (5.95). Имеем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{из уравнения (5.94)} & r_{(1)} = a_{(1)}, \\ \text{из уравнения (5.95)} & k^1 = r_{11}^{-1} a^1, \\ \text{из уравнения (5.94)} & r_{(2)} = a_{(2)} - k_{21} r_{(1)}, \\ \text{из уравнения (5.95)} & k^2 = r_{22}^{-1} (a^2 - r_{12} k^1) \end{array}\right\} \tag{5.96}$$

и так далее, пока найдем $r_{(n-1)}$, k^{n-1} и $r_{(n)}$.

Последний столбец матрицы $\boldsymbol{K}$ известен и равен $[0, 0, \ldots, 0, 1]$. Очевидно, что строки $r_{(i)}$ заданы уравнением (5.94) в виде

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} k_{il} r_{lj} \quad (j = i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n), \tag{5.97}$$

а столбцы k^j заданы уравнениями (5.95) в виде

$$k_{ij} = r_{jj}^{-1}\left(a_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} r_{lj} k_{jl}\right) \quad (i = j+1,\ j+2,\ \ldots,\ n). \tag{5.98}$$

Здесь при суммировании принято $\sum_{k=1}^{0} = 0$.

Рассмотрим вопрос о существовании факторизации матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}$ в случае, если определители (5.93) отличны от нуля. Заметим, что квадратная матрица $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}$ включает матрицы

$$[a_{11}] = [1][r_{11}],\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix},\ \ldots,\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}. \tag{5.99}$$

Вычислим определители этих матриц:

$$a_{11} = r_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = r_{11} r_{22},\ \ldots,\ |\boldsymbol{A}| = r_{11} r_{22}\ ,\ \ldots,\ r_{nn}. \tag{5.100}$$

Поскольку в матрице $\boldsymbol{R}$ все диагональные элементы $r_{ii} \neq 0$, то все определители (5.100) будут отличными от нуля.

Наконец, покажем, что факторизация $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}$ возможна, если имеют место неравенства (5.93). Для этого достаточно доказать, что существуют числа $r_{ij}\ (i \leqslant j)$ и $k_{ij}\ (i > j)$, удовлетворяющие равенствам (5.97) и (5.98). При $i = 1$ удовлетворим равенство (5.97), положив $r_{1j} = a_{1j}\ (j = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $r_{11} = a_{11} \neq 0$, то можно определить k_{i1} из уравнения (5.98) при $j = 1$. Предположим, что удовлетворены уравнения (5.97) при $i < m$ и (5.98) при $j < m$, где $1 < m \leqslant n$.

Теперь удовлетворим уравнение (5.97) при $i = m$ соотношением

$$r_{mj} = a_{mj} - \sum_{l=1}^{m-1} k_{ml} r_{kj} \quad (j = m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{5.101}$$

Для доказательства того, что $r_{mm} \neq 0$, используем уравнение (5.97) при $i = 1, 2, \ldots, m$, а также уравнение (5.98) при $j = 1, 2, \ldots, m-1$ и запишем матричное равенство

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ k_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{m,m-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_{mm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m}. \tag{5.102}$$

Используя определители этих матриц, находим

$$1 \cdot 1 \ldots 1 \cdot r_{11} r_{22} \ldots r_{mm} = |a_{ij}|_{i,j=1,2,\ldots,m}. \qquad (5.103)$$

Так как определитель в правой части по предположению (5.93) отличен от нуля, то заключаем, что $r_{mm} \neq 0$. Поэтому уравнение (5.98) может быть удовлетворено при $j = m$ и утверждение полностью доказано.

Пример 1. Факторизация

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{KR}$$

невозможна, так как это равенство включает элемент $a_{11} = 0$, а так как $a_{11} = r_{11}$, то $r_{11} = 0$. Следовательно, $|\boldsymbol{R}| = 0$. Но, с другой стороны,

$$-1 = |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{K}| \cdot |\boldsymbol{R}| = r_{11} r_{22},$$

что невозможно при $r_{11} = 0$.

Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}$, где диагональные элементы $r_{ii} \neq 0$, то система $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$ легко решается. Так как $\boldsymbol{K}$ треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, то уравнение $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Ry}) = \boldsymbol{b}$ при $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Ry}$ можно решить применяя рекуррентную формулу. Тогда уравнение $\boldsymbol{Ry} = \boldsymbol{w}$ решается применением рекуррентной формулы относительно $\boldsymbol{y}$.

Пример 2. Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ факторизована:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5/3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{KR}.$$

Для того, чтобы решить уравнение

$$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

решим сначала уравнение

$$\boldsymbol{Kw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Последовательно находим $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{10}{3}$. Теперь решим уравнение

$$\boldsymbol{Ry} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10/3 \end{bmatrix}.$$

Имеем $y_2 = 2$ и $3y_1 - 2 = 1$, т. е. $y_1 = 1$.

Вернемся к решению системы линейных уравнений в матричной форме $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, представленной в факторизованном виде

$$\boldsymbol{KRx} = \boldsymbol{b}. \qquad (5.104)$$

Промежуточное произведение $\boldsymbol{Rx}$ после выполнения операции умножения треугольной матрицы $\boldsymbol{R}$ на матрицу-столбец $\boldsymbol{x}$ даст новую матрицу-столбец $\boldsymbol{y}$, т. е.

$$\boldsymbol{Rx}=\boldsymbol{y} \tag{5.105}$$

и тогда матричное уравнение (5.104) можно записать в виде

$$\boldsymbol{Ky}=\boldsymbol{b}. \tag{5.106}$$

Запишем уравнения (5.106) в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} k_{11}y_1 &= b_1,\\ k_{21}y_1+k_{22}y_2 &= b_2,\\ k_{31}y_1+k_{32}y_2+k_{33}y_3 &= b_3,\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.107}$$

Из этих уравнений последовательно могут быть найдены величины y_1, y_2, y_3, ...

Уравнения (5.105) в развернутом виде таковы:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}x_1+r_{12}x_2+r_{13}x_3+\ldots+r_{1n}x_n &= y_1,\\ r_{22}x_2+r_{23}x_3+\ldots+r_{2n}x_n &= y_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{n-1,\,n-1}x_{n-1}+r_{n-1,\,n}x_n &= y_{n-1},\\ r_{nn}x_n &= y_n. \end{aligned}\right\} \tag{5.108}$$

Так как значения y_j определяются из системы (5.107), то неизвестные x_k могут быть последовательно найдены из уравнений (5.106), начиная от x_n до x_1.

Из уравнений (5.107) получаем последовательные значения y_j:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{k_{11}},\\ y_2 &= \frac{b_2-k_{21}y_1}{k_{22}},\\ y_3 &= \frac{b_3-k_{31}y_1-k_{32}y_2}{k_{33}},\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.109}$$

Практически удобным методом факторизации матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде произведения $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{KR}$ является следующая простая схема, аналогичная делению многочлена на многочлен.

Рассмотрим результат, полученный вычитанием из последовательности $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ такого кратного числа последовательности $(k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{n1})$, что первый член превращается в нуль.

Это действие может быть представлено следующим образом:

$$\begin{array}{l|llll|l} \underline{k_{11}\ k_{21}\ k_{31}\ \ldots} & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & \underline{\dfrac{b_1}{k_{11}}=y_1}\\ & -b_1 & -k_{21}y_1 & -k_{31}y_1 & \ldots & \\ \hline & 0 & b_2-k_{21}y_1 & b_3-k_{31}y_1 & \ldots & \end{array}$$

«Частное», начиная с y_1, и «остаток» последовательности, начиная с чисел $b'_j = b_j - k_{j1}y_1$ $(j \geqslant 2)$, получаются в правой части уравнений (5.107), используя первое из этих уравнений для исключения y_1 из остальных. Далее «делим» этот остаток последовательности на второй столбец матрицы $\boldsymbol{K}$, а именно на последовательность $(k_{22}, k_{32}, \ldots, k_{n2})$:

$$\begin{array}{l|lll|l} l_{22}\ l_{32}\ \ldots & b_2 - k_{21}y_1 & b_3 - k_{31}y_1 & \ldots & \dfrac{b_2 - k_{21}y_1}{k_{22}} = y_2 \\ & -b_2 \pm k_{21}y_1 & -k_{32}y_2 & \ldots & \\ \hline & 0 & b_3 - k_{31}y_1 - k_{32}y_2 & \ldots & \end{array}$$

«Частное», начиная с y_2, и «остаток» последовательности, начиная с чисел $b''_j = b_j - k_{j1}y_1 - k_{j2}y_2$ $(j \geqslant 3)$ «делятся» далее на третий столбец матрицы $\boldsymbol{K}$ и т. д. В этом алгоритме последующие операции взаимосвязаны с последующими столбцами матрицы $\boldsymbol{K}$, причем значения y связаны зависимостями (5.109). Каждый шаг связан с оценкой формулы, установленной строкой матрицы $\boldsymbol{K}$.

Проверка выполняется суммированием столбцов. Сумма уравнений (5.107)

$$\left(\sum_{j=1}^{n} k_{j1}\right) y_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} k_{j2}\right) y_2 + \ldots = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Сумма выше j существует для всей системы уравнений ($j = 1$ до n) или для первых k ее уравнений ($j = 1$ до k); суммы выше k уравнений ($k = 2$ до $n - 1$) предусматривают текущий контроль.

Рассмотрим теперь факторизацию матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{KR}$, где матрица $\boldsymbol{R}$ ограничена единичными диагональными элементами. Итак, требуется определить такие элементы k_{jl} и r_{jl}, чтобы

$$\begin{bmatrix} k_{11} & & \\ k_{21} & k_{22} & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots \\ & 1 & r_{23} & \ldots \\ & & 1 & \ldots \\ & & & \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}. \qquad (5.110)$$

Первый столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ дает (для всех j)

$$k_{j1} = a_{j1}.$$

Таким образом найден первый столбец матрицы $\boldsymbol{K}$. Далее, из второго столбца матрицы $\boldsymbol{A}$ имеем

$$\left.\begin{aligned} k_{11}r_{12} &= a_{12}, \\ k_{j1}r_{12} + k_{j2}r_{22} &= a_{j2} \quad (j \geqslant 2). \end{aligned}\right\} \qquad (5.111)$$

Из первого уравнения (5.111), получаем

$$r_{12} = \frac{a_{12}}{k_{11}},$$

т. е. неизвестный элемент во втором столбце матрицы R. Так как $r_{22}=1$, то из второго уравнения (5.111) (для $j\geqslant 2$), имеем

$$k_{j2}=a_{j2}-k_{j1}r_{12},$$

т. е. неизвестные элементы во втором столбце матрицы K.

Значения этих элементов могут получаться в результате деления:

$$\begin{array}{l|llll|l} k_{11}\ k_{21}\ k_{31}\ \ldots & a_{12} & a_{22} & a_{32}\ \ldots & & \left|\dfrac{a_{12}}{k_{11}}=r_{12}\right. \\ \hline & -a_{12} & -k_{21}\ a_{12} & -k_{31}\ a_{13}\ \ldots & & \\ & 0 & a_{22}-k_{21}a_{12} & a_{32}-k_{31}a_{13}\ \ldots & & \\ & & =k_{22} & =k_{32} & & \end{array}$$

Первые два столбца матрицы K теперь известны.

Третий столбец матрицы A получается из уравнений

$$\left.\begin{aligned} k_{11}r_{13} &= a_{13}, \\ k_{21}r_{13}+k_{22}r_{23} &= a_{23}, \\ k_{j1}r_{13}+k_{j2}r_{23}+k_{j3}r_{33} &= a_{j3}\ (j\geqslant 3). \end{aligned}\right\} \qquad (5.112)$$

Из первых двух уравнений находим

$$r_{13}=\frac{a_{13}}{k_{11}}\ \text{и}\ r_{23}=\frac{a_{23}-k_{21}r_{13}}{k_{22}},$$

т. е. два неизвестных элемента третьего столбца матрицы K.

Так как $r_{33}=1$, то из третьего уравнения (5.112) имеем

$$k_{j3}=a_{j3}-k_{j1}r_{13}-k_{j2}r_{23},$$

т. е. неизвестные элементы третьей строки матрицы K. Вычисление можно представить в виде схемы, в которой два делителя, начиная со второго столбца матрицы K, предварительно определены:

$$\begin{array}{l|llll|l} k_{11}k_{21}k_{31}\ \ldots & a_{13} & a_{23} & a_{33}\ \ldots & & \left|\dfrac{a_{13}}{k_{11}}=r_{13}\right. \\ \hline & -a_{13} & -k_{21}r_{13} & -k_{31}r_{13}\ \ldots & & \\ \hline k_{22}k_{32}\ \ldots & 0 & a_{33}-k_{21}r_{13} & a_{33}-k_{31}r_{13}\ \ldots & & \left|\dfrac{a_{23}-k_{21}r_{13}}{k_{22}}=r_{23}\right. \\ & -a_{23}\pm k_{21}r_{13} & & -k_{32}r_{23}\ \ldots & & \\ \hline & & a_{33}-k_{31}r_{13}-k_{32}r_{23}\ \ldots & & & \\ & & =l_{33} & \ldots & & \end{array}$$

Вычислительный алгоритм может быть теперь применен для нахождения последующих столбцов матрицы A по аналогичной схеме.

Пример 3. Факторизировать матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Первый столбец матрицы K аналогичен первому столбцу матрицы A. По условию $a_{12}=0$, поэтому $r_{12}=0$ и второй столбец матрицы K содержит другие элементы второго столбца матрицы A. Отсюда

$$K=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & x & 0 \\ 2 & -1 & x & x \end{bmatrix}, \qquad R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь x означает пока неизвестные элементы. Для третьих столбцов матриц K и R в результате деления третьего столбца матрицы A на первый и второй столбцы матрицы K получаем

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 2 & -1 & 4 & 2 & -4 & 5 & -5 & -7 & -2 \\ & & & & \pm 4 & \mp 2 & \pm 8 & \pm 4 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & & 3 & 3 & -3 & 3 \\ & & & & & \mp 3 & 0 & \pm 3 & \\ \hline & & & & & & \underbrace{3 \quad 0}_{\text{третий столбец матрицы } K.} & & \end{array} \Bigg\} \text{третий столбец матрицы } R,$$

Тогда

$$K=\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 4 & 0 & 3 & \\ 2 & -1 & 0 & x \end{bmatrix}, \qquad R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & x \\ & 1 & 3 & x \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные вычисления, применительно к четвертому столбцу матрицы A, приводят к схеме:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr|r} 2 & -1 & 4 & 2 & 6 & -2 & 6 & 10 & 3 \\ & & & & \mp 6 & \pm 3 & \mp 12 & \mp 6 & \\ \hline & 1 & 0 & -1 & & +1 & -6 & 4 & 1 \\ & & & & & \mp 1 & 0 & \pm 1 & \\ \hline & & & 3 & & 0 & -6 & 5 & -2 \\ & & & & & & \pm 6 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 5 = k_{44} & \end{array} \Bigg\} \text{четвертый столбец матрицы } R.$$

Итак, окончательно находим

$$K=\begin{bmatrix} 2 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 4 & 0 & 3 & \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & 1 & -2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

§ 7. МАТРИЧНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как уже говорилось (§ 2), линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

при заданных краевых условиях заменяется системой конечно-разностных уравнений (5.24′) и (5.25).

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее члена с первой производной:

$$y'' + q(x)\,y = f(x) \tag{5.113}$$

с краевыми условиями $y(x_0) = y_0$ и $y(x_n) = y_n$.

Применяя метод конечных разностей и обозначая $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$, запишем это дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O_1(y_i) + q_i y_i = f_i,$$

или

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + h^2 q_i y_i + h^2 O_1(y_i) = h^2 f_i,$$

откуда при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ получаем систему алгебраических уравнений

$$y_{i-1} + [h^2 q_i - 2]\,y_i + y_{i+1} = h^2 f_i - O(y_i), \tag{5.114}$$

где h — интервал интегрирования; $O(y_i)$ — остаток, включающий разности y четвертого и высших порядков $[O(y_i) = h^2 O_1(y_i)]$. Здесь значения y_0 и y_n являются заданными.

Систему алгебраических уравнений с $n-1$ неизвестными можно решать любым из известных методов.

Одним из простейших приемов решения такой системы является метод матричной факторизации. Уравнения (5.114) после переноса известных величин в правую часть принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -[2 + h^2 q_1]\,y_1 + y_2 &= -y_0 + h^2 f_1, \\ y_{i-1} - [2 + h^2 q_i]\,y_i + y_{i+1} &= h^2 f_i, \quad (2 \leqslant i \leqslant n-2) \\ y_{n-2} - [2 + h^2 y_{n-1}]\,y_{n-1} &= -y_n + h^2 f_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.115}$$

Первое и последнее уравнения системы дополняются краевыми условиями. Обозначаем для краткости $\Phi_i = h^2 q_1$ и $b_1 = -y_0 + h^2 f_1$, $b_i = h^2 f_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n-2)$, $b_{n-1} = -y_n + h^2 f_{n-1}$.

Пусть

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ — матрица-столбец неизвестных,} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ — матрица-столбец свободных членов.}$$

Тогда систему конечно-разностных уравнений (5.115) в матричном виде, учитывая правило произведения двух матриц (квадратной матрицы на матрицу-столбец), можно записать

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, \tag{5.116}$$

где (в общем случае) элементы квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ определяются соотношениями

$$a_{i,\,i-1}=1,\quad a_{ii}=-(2+h^2f_i)=-(2+\Phi_i),\quad a_{i,\,i+1}=1, \tag{5.117}$$

а остальные элементы нули, т. е. имеем матрицу из коэффициентов системы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} -(2+\Phi_1) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -(2+\Phi_2) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(2+\Phi_3) & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(2+\Phi_4) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(2+\Phi_{n-2}) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -(2+\Phi_{n-1}) \end{vmatrix}. \tag{5.118}$$

Любой элемент матрицы-столбца $\boldsymbol{b}$ определяется соотношением

$$b_i=h^2f_i-O(y_i). \tag{5.119}$$

В первом приближении разностями остатков $O(y_i)$ пренебрегают, тогда матричное уравнение (5.116) решается методом факторизации матрицы $\boldsymbol{A}$, т. е. представлением квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде произведения нижней треугольной матрицы $\boldsymbol{K}$ и верхней треугольной матрицы $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}. \tag{5.120}$$

Таким образом, основная задача заключается в определении матриц-сомножителей $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{R}$.

Подставляя матричное равенство (5.120) в матричное уравнение (5.116), получаем

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}. \tag{5.121}$$

Пусть произведение верхней треугольной матрицы $\boldsymbol{R}$ на матрицу-столбец $\boldsymbol{y}$ равно матрице-столбцу $\boldsymbol{w}$, т. е.

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{w}. \tag{5.122}$$

Тогда

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{b}. \tag{5.123}$$

Элементы треугольных матриц K и R находятся в результате решения системы уравнений и в общем виде записываются:

$$k_i = \frac{1}{-(2+\Phi_i)-k_{i-1}}. \tag{5.124}$$

Один из двух элементов k_0 или k_1 задается краевым условием в точке $x=a$; элементы k_i можно получить последовательно, увеличивая индекс i.

Для матрицы A нижняя (левая) треугольная матрица имеет вид

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-2} & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.125}$$

Верхняя (правая) треугольная матрица

$$R = \begin{vmatrix} -\frac{1}{k_1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_2} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{k_{n-2}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{k_{n-1}} \end{vmatrix}, \tag{5.126}$$

где $\frac{1}{k_1} = 2+\Phi_1$, $k_{i-1} + \frac{1}{k_i} = 2+\Phi_i \; (2 \leqslant i \leqslant n-1)$, так, что

$$k_1 = \frac{1}{2+\Phi_1}, \quad k_i = \frac{1}{2+\Phi_i - k_{i-1}}.$$

Матричное уравнение (5.123) есть система алгебраических уравнений вида

$$w_i = b_i - k_{i-1} w_{i-1}. \tag{5.127}$$

Один из двух элементов w_0 или w_1 опять задается краевым условием в точке $x=a$ и элементы w_i последовательно получим, увеличивая индекс i. Окончательно матричное уравнение (5.122) дает систему уравнений, которая записывается в виде

$$y_i = k_i (w_i - y_{i+1}). \tag{5.128}$$

Один из двух элементов y_n или y_{n-1} задается краевым условием в точке $x=b$ и элементы y_i можно вычислить последовательно, увеличивая индекс i.

В рассмотренном методе матричный метод вычислений тесно связан с методом факторизации. Этим и объясняется его название — *матричная факторизация*. Метод матричной факторизации позволяет получить точное решение конечно-разностного уравнения вида

$$A_i\varphi_{l+1} - B_i\varphi_l + C_i\varphi_{l-1} = -F_l,$$

где A_l, B_i, C_i — числовые матрицы;

$$\varphi_l = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \varphi_{i2} \\ \vdots \\ \varphi_{im} \end{bmatrix}, \quad F_l = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \vdots \\ f_{im} \end{bmatrix} \text{ — матрицы-столбцы,}$$

не используя метод последовательных приближений.

Наиболее эффективно метод матричной факторизации применяется для решения задач в случае матриц невысокого порядка. Расчет с помощью метода матричной факторизации не сопровождается накоплением ошибок округления и является устойчивым.

ЧАСТЬ III

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА VI

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. СВЯЗЬ С ЗАДАЧЕЙ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Интегральные уравнения являются мощным средством аналитического исследования различных задач, встречающихся в физике и технике.

Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений проводится в два этапа. Сперва находится общее решение дифференциального уравнения, а затем частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям.

Если же задачу удается свести к интегральному уравнению, то необходимость в поэтапном решении отпадает. Кроме того, в отличие от множества типов дифференциальных уравнений и краевых условий существует всего несколько типов интегральных уравнений.

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла. Если неизвестная функция входит в уравнение в первой степени, то такое интегральное уравнение называется *линейным*.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода называется уравнение вида

$$\int_a^b K(x,\ t)\, y(t)\, dt = f(x). \tag{6.1}$$

Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение вида

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,\ t)\, y(t)\, dt + f(x), \tag{6.2}$$

где $K(x, t)$ — известная непрерывная функция двух переменных, называемая *ядром* интегрального уравнения; $f(x)$ — свободный член, представляющий заданные непрерывные функции; $y(x)$ — искомая функция; a, b — заданные пределы интегрирования; λ — числовой параметр.

Интеграл в правой части уравнения (6.2) можно рассматривать как интеграл с параметром t.

Ядро уравнения $K(x, t)$ определено на плоскости xOt в квадрате $R: a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant t \leqslant b$ (рис. 52).

Решением интегрального уравнения называется функция $y(x)$, обращающая его в тождество (по x).

Введение параметра λ во многих случаях облегчает исследование интегрального уравнения (6.2). Параметр λ вводится потому, что при данном фиксированном значении λ интегральное уравнение (6.2) не всегда имеет решение. Варьируя же параметр λ, можно добиться, чтобы решение этого уравнения существовало. Параметр λ может быть введен также в левую часть уравнения (6.1), которое в этом случае принимает вид

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad (6.1')$$

Если в интегральном уравнении (6.2) $f(x) \equiv 0$, то имеем однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt, \qquad (6.3)$$

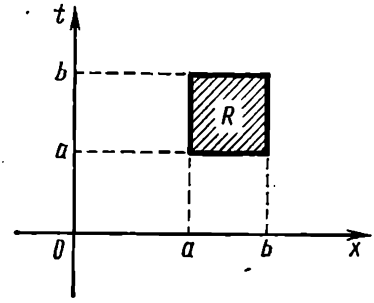


Рис. 52

которое всегда имеет нулевое решение $y(x) = 0$. Значения параметра λ, при которых однородное уравнение (6.3) имеет ненулевые решения $y(x) \not\equiv 0$, называются *собственными значениями* (собственными числами) ядра $K(x, t)$ или соответствующего неоднородного уравнения, а отвечающие им ненулевые решения называются *собственными функциями*.

Большое прикладное значение имеют интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром $K(x, t)$, т. е. таким, что

$$K(x, t) = K(t, x). \qquad (6.4)$$

Симметричное ядро обладает следующими свойствами:

1) для всякого симметричного ядра существует по меньшей мере одно собственное значение;

2) все собственные значения симметричного ядра действительны;

3) собственные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ симметричного ядра, соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ортогональны между собой на основном промежутке (a, b), т. е.

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0. \qquad (6.5)$$

Основными задачами при решении интегральных уравнений является нахождение точного или приближенного решения неоднородного интегрального уравнения при заданном значении параметра λ

и собственных значений, а также нахождение собственных функций однородного интегрального уравнения.

Уравнение с переменным верхним пределом вида

$$\int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt = f(x) \tag{6.6}$$

называется *интегральным уравнением Вольтерра первого рода.*

Уравнение с переменным верхним пределом вида

$$y(x) = \int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt + f(x) \quad (a \leqslant t \leqslant x \leqslant b) \tag{6.7}$$

называется *интегральным уравнением Вольтерра второго рода.*

Если ядро $K(x, t)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, причем $K(x,\ x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то интегральное уравнение Вольтерра первого рода сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Дифференцируя уравнение Вольтерра первого рода по x, имеем

$$K(x,\ x)\,y(x) + \int_a^x K'_x(x, t)\,y(t)\,dt = f'(x),$$

откуда получаем уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = \int_a^x K_1(x,\ t)\,y(t)\,dt + f_1(x),$$

где

$$K_1(x,\ t) = -\frac{K'_x(x,\ t)}{K(x,\ x)}, \quad f_1(x) = \frac{f'(x)}{K(x,\ x)}.$$

С формальной стороны уравнение Вольтерра отличается от уравнения Фредгольма (6.2) лишь тем, что интеграл с постоянными пределами заменяется интегралом с переменным верхним пределом.

Между задачей Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка и уравнением Вольтерра существует тесная взаимосвязь. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)\,u = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{6.8}$$

при начальных условиях

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = \beta. \tag{6.9}$$

Полагая

$$\frac{d^2u}{dx^2} = y(x), \tag{6.10}$$

и последовательно интегрируя, имеем

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(t)\,dt + C_1$$

и

$$u(x) = \int_a^x dt \int_a^t y(s)\,ds + C_1(x-a) + C_2.$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле последнего равенства, замечаем, что

$$\int_a^x dt \int_a^t y(s)\,ds = \int_a^x ds \int_t^x y(s)\,dt = \int_a^x (x-s)\,y(s)\,ds \equiv \int_a^x (x-t)\,y(t)\,dt.$$

Из начальных условий (6.9) при $x=a$, находим

$$\alpha = \int_a^a dt \int_a^t y(s)\,ds + C_1(a-a) + C_2,$$

откуда $C_2 = \alpha$. Аналогично получим

$$\beta = \int_a^a y(t)\,dt + C_1$$

и, так как интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, то $C_1 = \beta$. Поэтому

$$\frac{du}{dx} = \int_a^x y(t)\,dt + \beta \tag{6.11}$$

и

$$u(x) = \int_a^x (x-t)\,y(t)\,dt + \beta(x-\alpha) + \alpha. \tag{6.12}$$

Соотношения (6.10)—(6.12) подставим в дифференциальное уравнение (6.8), тогда

$$y(x) + p(x)\left[\int_a^x y(t)\,dt + \beta\right] + q(x)\left[\int_a^x (x-t)\,y(t)\,dt + \beta(x-\alpha) + \alpha\right] = f(x),$$

или

$$y(x) + p(x)\int_a^x y(t)\,dt + q(x)\int_a^x (x-t)\,y(t)\,dt = f(x) - \beta p(x) - \\ - [\beta(x-\alpha) + \alpha]\,q(x).$$

Окончательно имеем

$$y(x) + \int_a^x [p(x) + q(x)(x-t)]\,y(t)dt = f(x) - \beta p(x) - [\beta(x-\alpha) + \alpha]\,q(x).$$

Обозначая для краткости

$$p(x)+q(x)(x-t)=K(x,\ t),$$
$$f(x)-\beta p(x)-[\beta(x-\alpha)+\alpha]q(x)=F(x),$$

получаем интегральное уравнение Вольтерра

$$y(x)=\int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt+F(x). \qquad (6.13)$$

Зная функцию $y(x)$, из зависимости (6.12) можно найти $u(x)$ и производную $u'(x)$.

Итак, интегральное уравнение Вольтерра включает в себя все данные задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (6.8). Аналогичный результат можно получить для линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Имеет место и обратная задача. Если ядро

$$K(x,\ t)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,t^i$$

есть целый многочлен n-й степени относительно t, то последовательно дифференцируя интегральное уравнение Вольтерра (6.13), приходим к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Пример 1. Найти решение уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt=\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение по x, имеем

$$y(x)-\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt=x, \qquad (1)$$

дифференцируя еще раз, получим

$$y'-\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt=1,$$

или, используя заданное уравнение,

$$y'=\frac{x^2}{2}+1.$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид

$$y(x)=\frac{x^3}{6}+x+C_1, \qquad (2)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Принимая во внимание, что из уравнения (1) следует, что

$$y(0)=0,$$

из равенства (2) находим: $C_1=0$. Тогда решение заданного уравнения Вольтерра имеет вид

$$y(x)=\frac{x^3}{6}+x.$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x)+\int_0^x (2+x-t)\,y(t)\,dt=x^2.$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение, имеем

$$y'(x)+2y(x)+\int_0^x y(t)\,dt=2x, \tag{1}$$

откуда после повторного дифференцирования получим

$$y''(x)+2y'(x)+y(x)=2. \tag{2}$$

При $x=0$ из данного интегрального уравнения находим начальные условия:

$$y(0)+\int_0^0 (2+0-t)\,y(t)\,dt=0,$$

или

$$y(0)=0.$$

Аналогично, из соотношения (1) имеем

$$y'(0)+2y(0)+\int_0^0 y(t)\,dt=2\cdot 0,$$

т. е.

$$y'(0)+2\cdot 0+0=0,$$

или

$$y'(0)=0.$$

Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$y(x)=2-2(1+x)e^{-x}$$

и является также решением данного интегрального уравнения.

Упражнения

Решить интегральные уравнения:

1. $y(x)=x+\int_0^x (t-x)y(t)\,dt.$

Ответ. $y(x)=\sin(x).$

2. $y(x)=1+\int_0^x (t-x)y(t)\,dt$.

Отв. $y(x)=\cos(x)$.

3. $y(x)=1+\int_0^x y(t)\,dt$.

Отв. $y(x)=e^x$.

4. $y(x)=\sin x-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{1/2} xty(t)\,dt$.

Отв. $y=\sin x$.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

К интегральным уравнениям приводятся многие физические задачи.

Рассмотрим задачу о теплопроводности в конечном стержне. Найти распределение температуры в однородном изотропном* стержне длины l, концы $x=0$ и $x=l$ (рис. 53) которого имеют температуру $T(0)$ и соответственно $T(l)$ от действия источника, расположенного в точке ξ и выделяющего за единицу времени количество теплоты W_0. Боковая поверхность стержня термоизолирована (т. е. отсутствует потеря теплоты через боковую поверхность). Распределение температуры в стержне находится в состоянии теплового равновесия вне зависимости от времени, т. е. является стационарным. В интервалах $0\leqslant x\leqslant\xi$ и $\xi\leqslant x\leqslant l$ задано линейное изменение температуры.

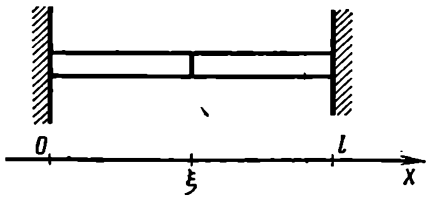


Рис. 53

Р е ш е н и е. Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x, то согласно закону теплопроводности Фурье количество теплоты, отдаваемое стержнем за единицу времени левым концом $x=0$, пропорционально падению температуры в интервале $0\leqslant x\leqslant\xi$ стержня, а именно

$$W_1=kq\frac{T(\xi)-T(0)}{\xi}.$$

Здесь k — коэффициент теплопроводности материала стержня, q — площадь поперечного сечения стержня.

Соответственно утечка теплоты на другом конце $x=l$ стержня составляет количество

$$W_2=kq\frac{T(\xi)-T(l)}{l-\xi}.$$

---

* Изотропный стержень — это стержень, обладающий одинаковыми физическими свойствами по разным направлениям.

Сумма отдаваемых наружу количеств теплоты должна равняться поступающему количеству теплоты W_0, т. е. должно выполняться уравнение теплового баланса

$$W_1 + W_2 = W_0.$$

Подставляя в левую часть уравнения теплового баланса величины W_1 и W_2, получаем

$$kq\left[\frac{T(\xi)-T(0)}{\xi}+\frac{T(\xi)-T(l)}{l-\xi}\right]=W_0.$$

Разрешая это равенство относительно температуры $T(\xi)$, имеем

$$T(\xi)=\frac{W_0}{kql}\xi(l-\xi)+T(0)\frac{l-\xi}{l}+T(l)\frac{\xi}{l}. \qquad (1)$$

Для нахождения распределения температуры в стержне используем заданное по условию линейное изменение температуры стержня в интервалах $0 \leqslant x \leqslant \xi$ и $\xi \leqslant x \leqslant l$.

Для интервала $0 \leqslant x \leqslant \xi$, находим

$$T(x)=T(0)+[T(\xi)-T(0)]\frac{x}{\xi}=\frac{W_0}{kql}x(l-\xi)+T(0)\frac{l-x}{l}+T(l)\frac{x}{l}; \qquad (2)$$

для интервала $\xi \leqslant x \leqslant l$:

$$T(x)=T(l)+[T(\xi)-T(l)]\frac{l-x}{l-\xi}=\frac{W_0}{kql}(l-x)\xi+T(0)\frac{l-x}{l}+T(l)\frac{x}{l}. \qquad (3)$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned}\frac{x(l-\xi)}{l}&=K(x,\ \xi)\ \text{для}\ x\leqslant\xi\\ \text{и}\qquad\qquad\\ \frac{\xi(l-x)}{l}&=K(x,\ \xi)\ \text{для}\ \xi\leqslant x,\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

тогда заданное соотношениями (2) и (3) распределение температуры представляется в виде

$$T(x)=\frac{W_0}{kq}K(x,\ \xi)+T(0)\frac{l-x}{l}+T(l)\frac{x}{l}. \qquad (5)$$

Функция $T(0)\frac{l-x}{l}+T(l)\frac{x}{l}$ представляет распределение температуры без учета источника теплоты, в то время как выражение

$$T=\frac{W_0}{kq}K(x,\ \xi) \qquad (6)$$

учитывает действие постоянного источника теплоты.

В точке ξ тепловой источник рассматриваем как непрерывного действия. Равнодействующую распределения температуры можно

условно представить как сумму действия элементарных тепловых источников величины $W(\xi)\Delta\xi$, где $W(\xi)$ — линейная плотность источника. Тогда действие элементарного теплового источника $W(\xi)\Delta\xi$ в точке ξ согласно зависимости (6) будет

$$\Delta T = \frac{1}{kq} K(x, \xi) W(\xi) \Delta\xi. \tag{7}$$

Суммируя действия элементарных тепловых источников (7) и переходя к пределу, получим

$$T = \frac{1}{kq} \int_0^l K(x, \xi) W(\xi) \Delta\xi. \tag{8}$$

Тогда для распределения температуры получаем зависимость

$$T(x) = \frac{1}{kq} \int_0^l K(x, \xi) W(\xi) d\xi + T(0) \frac{l-x}{l} + T(l) \frac{x}{l}. \tag{9}$$

Возникает вопрос, какой должна быть неизвестная функция $W(\xi)$, чтобы температура $T(x)$ была равной заданной функции.

Уравнение (9), из которого должна быть определена функция $W(\xi)$, представляет линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

§ 3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

Интегральные уравнения общего вида решаются приближенными методами. Одним из наиболее простых приближенных методов является метод последовательных приближений. Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x). \tag{6.14}$$

Решим это интегральное уравнение, предполагая, что ядро уравнения $K(x, t)$ является непрерывной функцией в квадрате R: $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Эти условия позволяют утверждать, что функции $K(x, t)$ и $f(x)$ ограничены. Полагая ядро $K(x, t)$ интегральным, ищем решение $y(x)$ интегрального уравнения (6.14) в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням λ:

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots + \lambda^n y_n(x) + \ldots . \tag{6.15}$$

Если ряд (6.15) равномерно сходится при некоторых значениях λ, то его можно подставить в правую часть равенства (6.14), заменив предварительно аргумент x через t и выполнив почленное интегрирование.

Тогда равенство (6.14) принимает вид

$$y(x)=f(x)+\left[\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y_0(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K(x,\ t)\,y_1(t)\,dt+\ldots+\right.$$
$$\left.+\lambda^n\int_a^b K(x,\ t)\,y_n(t)\,dt+\ldots\right]. \qquad (6.16)$$

Заменяя левую часть полученного уравнения выражением (6.15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в левой и правой частях полученного равенства, находим

$$\left.\begin{aligned}
&y_0(x)=f(x),\\
&y_1(x)=\int_a^b K(x,\ t)\,y_0(t)\,dt,\\
&y_2(x)=\int_a^b K(x,\ t)\,y_1(t)\,dt,\\
&y_3(x)=\int_a^b K(x,\ t)\,y_2(t)\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n(x)=\int_a^b K(x,\ t)\,y_{n-1}(t)\,dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

Процесс построения функций $y_n(x)$, называемых *последовательными приближениями решения,* можно продолжать неограниченно.

Выражения (6.17) позволяют последовательно вычислить коэффициенты ряда (6.15) и составить ряд, формально удовлетворяющий интегральному уравнению (6.14). Чтобы сумма ряда (6.15) действительно являлась решением интегрального уравнения (6.14), необходимо, чтобы ряд был равномерно сходящимся. Пусть ядро $K(x,\ t)$ ограничено:

$$|K(x,\ t)|<A \qquad (6.18)$$

и функция

$$|f(x)|<M, \qquad (6.19)$$

где A и M — наперед заданные положительные числа. Тогда из равенств (6.17) получим

$$|y_0(x)|=|f(x)|<M,$$
$$|y_1(x)|\leqslant\int_a^b|K(x,\ t)||y_0(t)|\,dt<AM\int_a^b dt=AM\,(b-a),$$
$$|y_2(x)|\leqslant\int_a^b|K(x,\ t)||y_1(t)|\,dt<A\cdot AM\,(b-a)\int_a^b dt=A^2(b-a)^2M,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|y_n(x)|\leqslant\int_a^b|K(x,\ t)||y_{n-1}(t)|\,dt<A\cdot A^{n-1}M\,(b-a)^{n-1}\int_a^b dt=A^n(b-a)^nM.$$

Очевидно, что члены ряда при выполнении условия (6.18) меньше членов ряда

$$M + MA(b-a)|\lambda| + MA^2(b-a)^2|\lambda|^2 + \ldots + MA^n(b-a)^n|\lambda|^n + \ldots,$$

который является геометрической прогрессией со знаменателем $A(b-a)\lambda$. Этот ряд сходится пока, знаменатель прогрессии меньше единицы. Следовательно, ряд (6.15) сходится, если

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}. \tag{6.20}$$

Итак, интегральное уравнение (6.14) имеет единственное решение, если параметр λ достаточно мал по абсолютной величине. С помощью соотношений (6.17) можно последовательно вычислить коэффициенты ряда (6.15), что неудобно, так как для нахождения коэффициента $y_n(x)$ необходимо вычислить все предыдущие коэффициенты.

Поставим перед собой задачу найти формулы, с помощью которых можно выразить коэффициенты через данные элементы интегрального уравнения (6.14), т. е. через ядро $K(x, t)$ и правую часть $f(x)$. Из первого соотношения (6.17) непосредственно имеем

$$y_0(x) = f(x).$$

Из второго соотношения (6.17) получаем

$$y_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt. \tag{6.21}$$

Прежде чем подставить найденное значение $y_1(x)$ в третье из соотношений (6.17), заменим в нем переменную интегрирования t на s:

$$y_1(s) = \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt.$$

Изменяя порядок интегрирования, имеем

$$y_2(x) = \int_a^b K(x, s)\, y_1(s)\, ds = \int_a^b K(x, s)\left(\int_a^b K(s, t) f(t)\, dt\right) ds =$$

$$= \int_a^b f(t)\left(\int_a^b K(x, s) K(s, t)\, ds\right) dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t)\, dt, \tag{6.22}$$

где $K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s) K(s, t)\, dt$. Заменяя далее в четвертом из соотношений (6.17) переменную t на s и подставляя выражение (6.22), получим

$$y_3(x) = \int_a^b K(x, s)\, y_2(s)\, ds = \int_a^b K(x, s)\left[\int_a^b K_2(s, t) f(t)\, dt\right] ds =$$

$$= \int_a^b f(t)\left[\int_a^b K(x, s) K_2(s, t)\, ds\right] dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t)\, dt, \tag{6.23}$$

где $K_3(x, t)=\int_a^b K(x, s) K_2(s, t)\, ds$. Продолжая процесс и вводя последовательно функции

$$K_n(x, t)=\int_a^b K(x, s) K_{n-1}(s, t)\, ds, \tag{6.24}$$

получаем

$$y_n(x)=\int_a^b K_n(x, t) f(t)\, dt. \tag{6.25}$$

Функции $K_2(x, t)$, $K_3(x, t)$, ..., $K_n(x, t)$, ... называются *итерированными (повторными) ядрами*. Ядро $K(x, t)$ в этом случае называется первым ядром. Подставляя найденное значение $y_n(x)$ в ряд (6.15), находим

$$y(x)=f(x)+\lambda\left[\int_a^b K(x, t) f(t)\, dt+\lambda\int_a^b K_2(x, t) f(t)\, dt+\right.$$
$$\left.+\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K_n(x, t) f(t)\, dt+\ldots\right]. \tag{6.26}$$

Если ряд

$$K(x, t)+\lambda K_2(x, t)+\lambda^2 K_3(x, t)+\ldots+\lambda^{n-1} K_n(x, t)+\ldots \tag{6.27}$$

сходится равномерно, то сумму в квадратной скобке равенства (6.26) можно заменить интегралом суммы и записать

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, t, \lambda) f(t)\, dt,$$

где $\Gamma(x, t, \lambda)$ — сумма ряда (6.27), т. е.

$$\Gamma(x, t, \lambda)=K(x, t)+\lambda K_2(x, t)+\lambda^2 K_3(x, t)+\ldots+\lambda^{n-1} K_n(x, t)+\ldots .$$

Функция $\Gamma(x, t, \lambda)$ называется *резольвентой* интегрального уравнения (6.14). Зная резольвенту, можно найти решения интегрального уравнения (6.14) при любой функции $f(x)$, если параметр λ достаточно мал по абсолютной величине, т. е. выполняется условие (6.20).

Пример 1. Вычислить три первых последовательных приближения решения интегрального уравнения

$$y(x)+\int_0^1 xty(t)\, dt=x^2.$$

Решение. Пусть решение имеет вид

$$y(x)\approx y_3(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+\lambda^3\varphi_3(x),$$

где $\varphi_0(x) = y(x) = x^2$, $\varphi_n(x) = \int_0^1 K(x, t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt$. Имеем

$$\varphi_0(x) = x^2,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 xt \cdot t^2\,dt = \frac{x}{4},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^1 xt \cdot \frac{t}{4}\,dt = \frac{x}{12},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^1 xt \cdot \frac{t}{12}\,dt = \frac{x}{36}.$$

Так как $\lambda = -1$, то первые три последовательные приближения и есть приближенные решения интегрального уравнения:

$$y_0(x) = \varphi_0(x) = x^2,$$

$$y_1(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) = x^2 - \frac{x}{4},$$

$$y_2(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = x^2 - x\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3}\right),$$

$$y_3(x) = \varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) = x^2 - x\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2}\right).$$

Найдем точное решение данного интегрального уравнения. Имеем

$$y(x) = x^2 - xC_1,$$

где $c_1 = \int_0^1 ty(t)\,dt = \int_0^1 t(t^2 - c_1 t)\,dt = \frac{1}{4} - \frac{c_1}{3}$. Следовательно, $c_1 = \frac{3}{16}$ и точное решение уравнения:

$$y(x) = x^2 - \frac{3}{16}x.$$

Пример 2. Для интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-t} y(t)\,dt + f(x)$$

найти резольвенту, определив радиус сходимости ряда. Записать решение при произвольном свободном члене $f(x)$, а также найти решение при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $f(x) = e^x$.

Решение. Находим итерации ядра:

$$K(x, t) = K_1(x, t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_0^1 e^{x-s} e^{s-t}\, ds = e^{x-t},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_2(s, t)\, ds = e^{x-t}.$$

Итак,

$$K_n(x, t) = e^{x-t} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Резольвента ядра

$$\Gamma(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = e^{x-t} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}.$$

Полученный ряд является геометрической прогрессией, сходится при $|\lambda| < 1$ и сумма его равна $\frac{1}{1-\lambda}$. Таким образом,

$$\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{e^{x-t}}{1-\lambda}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 e^{x-t} f(t)\, dt.$$

В частности, при $\lambda = 1/2$ имеем $f(x) = e^x$ и

$$y(x) = e^x + \frac{1/2}{1-1/2} \int_0^1 e^{x-t} e^t\, dt = 2e^x.$$

Упражнения

Найти резольвенту, радиус сходимости ряда и решение уравнения при произвольном свободном члене $f(x)$, а также решение при заданных λ и $f(x)$ для уравнений:

1. $y(x) = \lambda \int_0^1 xty(t)\, dt + f(x)$; $\lambda = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{5}{6} x$.

Отв. $\Gamma(x, t, \lambda) = xt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda}$, $|\lambda| < 3$;

$y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\, dt + f(x)$; $y(x) = x$.

2. $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 ty(t)\,dt+f(x)$; $\lambda=\frac{1}{2}$, $f(x)=x$.

Отв. $\Gamma(x, t, \lambda)=t\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-1}=\frac{2t}{2-\lambda}$, $|\lambda|<2$; при $\lambda=\frac{1}{2}$ имеем $f(x)=x$ и решение $y=x+\frac{2}{9}$.

§ 4. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Пусть дано интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_0^x K(x, t)\,y(t)\,dt, \tag{6.28}$$

где $f(x)$ — функция непрерывная на отрезке $[0, a]$; $K(x, t)$ — ядро непрерывное при $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant x$. На отрезке $[0, a]$ возьмем непрерывную функцию $y_0(x)$ и подставим ее в правую часть интегрального уравнения (6.28) вместо функции $y(x)$. В результате получим функцию

$$y_1(x)=f(x)+\lambda\int\limits_0^x K(x, t)\,y_0(t)\,dt,$$

также непрерывную на отрезке $[0, a]$. Продолжая процесс подстановки, получим последовательность функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ..., где

$$y_0(x)=f(x),$$

$$y_n(x)=f(x)+\lambda\int\limits_0^x K(x, t)\,y_{n-1}(t)\,dt.$$

Последовательность функций $\{y_n(x)\}$ при $n\to\infty$ сходится к точному решению $y(x)$ интегрального уравнения (6.28). Функции $y_n(x)$ являются последовательными приближениями решения уравнения (6.28). Эти функции целесообразно выразить через итерированные (повторные) ядра $K_n(x, t)$, где

$$K_1(x, t)=K(x, t)$$

и

$$K_{n+1}(x, t)=\int\limits_t^x K(x, s)\,K_n(s, t)\,ds \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

следующим образом:

$$y_n(x)=f(x)+\int\limits_a^x\left[\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K_\nu(x, t)\right]f(t)\,dt.$$

Тогда

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_a^x \Gamma(x, t, \lambda) f(t)\, dt,$$

где резольвента

$$\Gamma(x, t, \lambda) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x, t).$$

Пример 1. Вычислить первые три последовательные приближения решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) + \int_0^x (x-t)\, y(t) = 1.$$

Решение. Пусть искомое решение имеет вид

$$y(x) \approx y_3(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \lambda^3\varphi_3(x),$$

где $\varphi_0(x) = y(x) = 1$, $\varphi_n(x) = \int_0^x K(x, t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt$. Тогда имеем

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x (x-t)\, dt = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2!},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x (x-t)\, \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{x^4}{4!},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x (x-t)\, \frac{t^4}{4!}\, dt = \frac{x^6}{6!}.$$

Следовательно, приближенные решения данного уравнения (здесь $\lambda = -1$) таковы:

$$y_0(x) \approx 1,$$

$$y_1(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$y_2(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$y_3(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Пример 2. Для интегрального уравнения типа Вольтерра

$$y(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} y(t)\, dt + f(x)$$

найти резольвенту и решение.

Решение. Находим итерации ядра

$$K(x,\ t)=K_1(x,\ t)=e^{x-t},$$

$$K_2(x,\ t)=\int_t^x K(x,\ s)\,K(s,\ t)\,ds=\int_t^x e^{x-s}e^{s-t}\,ds=(x-t)\,e^{x-t},$$

$$K_3(x,\ t)=\int_t^x e^{x-s}\,(s-t)\,e^{s-t}\,ds=\frac{(x-t)^2}{2!}\,e^{x-t}.$$

Итак,

$$K_n(x,\ t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-t}.$$

Резольвента ядра

$$\Gamma(x,\ t,\ \lambda)=e^{x-t}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{x-t}e^{\lambda(x-t)}=e^{(\lambda+1)(x-t)}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)}f(t)\,dt.$$

Неудобством метода последовательных приближений является необходимость вычисления квадратур. Если интегралы точно не вычисляются, то приходится прибегать к численному интегрированию.

§ 5. МЕТОД ВЫРОЖДЕННЫХ ЯДЕР ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА. СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Найдем решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt \tag{6.29}$$

не только при достаточно малых значениях параметра λ, но и для всех λ, при которых это решение существует.

Рассмотрим решение интегрального уравнения с вырожденным ядром. Ядро $K(x,\ t)$ интегрального уравнения называется *вырожденным*, если его можно представить в виде конечной суммы парных произведений функций, одна из которых зависит от x, а другая от t:

$$K(x,\ t)=a_1(x)\,b_1(t)+a_2(x)\,b_2(t)+\ldots+a_n(x)\,b_n(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,b_i(t), \tag{6.30}$$

где $a_i(x)$, $b_i(t)$ — линейно независимые функции.

Интегральным уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром называется уравнение вида

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,b_i(t)\right]y(t)\,dt. \tag{6.31}$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6.29) с вырожденным ядром решается подстановкой вырожденного ядра в это уравнение. Имеем

$$y(x)=f(x)+\lambda\left[\int_a^b a_1(x)\,b_1(t)\,y(t)\,dt+\int_a^b a_2(x)\,b_2(t)\,y(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\ldots+\int_a^b a_n(x)\,b_n(t)\,y(t)\,dt\right]=f(x)+\lambda\left[a_1(x)\int_a^b b_1(t)\,y(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+a_2(x)\int_a^b b_2(t)\,y(t)\,dt+\ldots+a_n(x)\int_a^b b_n(t)\,y(t)\,dt\right]=f(x)+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\int_a^b b_i(t)\,y(t)\,dt.$$

Пусть

$$\int_a^b b_i(t)\,y(t)\,dt=c_i, \tag{6.32}$$

где $c_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — постоянные коэффициенты, тогда получим

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i a_i(x). \tag{6.33}$$

Если найдены коэффициенты c_i, то задачу можно считать решенной. Однако их вычислить нельзя, так как функция $y(x)$ пока является неизвестной. Для нахождения коэффициентов c_i подставим равенство (6.33) в соотношения (6.32), в результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt+\lambda\int_a^b b_i(t)\sum_{j=1}^{n}c_j a_j(t)\,dt,$$

или

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j\,g_{ij}=f_i, \tag{6.34}$$

где

$$f_i=\int_a^b b_i(t)\,f(t)\,dt,\qquad g_{ij}=\int_a^b a_i(t)\,b_j(t)\,dt. \tag{6.35}$$

Систему (6.34) можно записать также в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda g_{ji})\, c_j = f_i, \tag{6.36}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Итак, для нахождения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеем систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \lambda \sum_{i=1}^{n} g_{1i} c_i &= f_1, \\ c_2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} g_{2i} c_i &= f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_n - \lambda \sum_{i=1}^{n} g_{ni} c_i &= f_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.36'}$$

или, в развернутом виде,

$$\left.\begin{aligned} (1 - \lambda g_{11})\, c_1 - \lambda g_{12} c_2 - \ldots - \lambda g_{1n} c_n &= f_1, \\ -\lambda g_{21} c_1 + (1 - \lambda g_{22})\, c_2 - \ldots - \lambda g_{2n} c_n &= f_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\lambda g_{n1} c_1 - \lambda g_{n2} c_2 - \ldots + (1 - \lambda g_{nn})\, c_n &= f_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.36''}$$

Если система (6.36″) имеет решение относительно неизвестных c_i, то и неоднородное интегральное уравнение имеет решение, определяемое уравнением (6.33). Следовательно, интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6.29) с вырожденным ядром и система (6.36″) эквивалентны. Определитель системы (6.36″)

$$D(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda g_{ji}) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda g_{11} & -\lambda g_{21} & \ldots & -\lambda g_{n1} \\ -\lambda g_{12} & 1 - \lambda g_{22} & \ldots & -\lambda g_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ -\lambda g_{1n} & -\lambda g_{2n} & \ldots & 1 - \lambda g_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.37}$$

Пусть $A_{ij}(\lambda)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов $\delta_{ij} - \lambda g_{ji}$ определителя $D(\lambda)$. Если $D(\lambda) \neq 0$, то, согласно правилу Крамера,

$$c_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_{l=1}^{n} A_{li}(\lambda) f_l}{D(\lambda)},$$

где $D_i(\lambda)$ — определитель (6.37), в котором столбец свободных членов заменяет i-й столбец этого определителя ($i = 1, 2, \ldots, n$).

В силу соотношения (6.33) решение интегрального уравнения (6.31) имеет вид

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i a_i(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ji}(\lambda)}{D(\lambda)}f_j a_i(x). \quad (6.38)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных c_i. Подставляя вместо f_j первое из выражений (6.35) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, имеем

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i(x)\,b_j(t)\,A_{ji}(\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\,dt.$$

Обозначая для краткости

$$D(x,\ t,\ \lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i(x)\,b_j(t)\,A_{ji}(\lambda),$$

запишем последнее равенство в виде

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{D(x,\ t,\ \lambda)}{D(\lambda)}f(t)\,dt. \quad (6.39)$$

Функция

$$\Gamma(x,\ t,\ \lambda)=\frac{D(x,\ t,\ \lambda)}{D(\lambda)}\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i(x)\,b_j(t)\frac{A_{ji}(\lambda)}{D(\lambda)} \quad (6.40)$$

называется *резольвентой* интегрального уравнения.
Тогда

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,\ t,\ \lambda)f(t)\,dt.$$

Если вычислены $D(x,\ t,\ \lambda)$ и $D(\lambda)$, то резольвента Γ является известной функцией.

Результаты, полученные для вырожденных ядер, можно распространить и на общий случай.

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$y(x)-2\int_0^1(1+3xt)\,y(t)\,dt=x^2.$$

Решение. Представим данное интегральное уравнение в виде

$$y(x)=2\int_0^1 y(t)\,dt+6x\int_0^1 ty(t)\,dt+x^2.$$

Тогда, обозначая

$$c_1 = \int_0^1 y(t)\,dt, \quad c_2 = \int_0^1 ty(t)\,dt, \tag{1}$$

имеем

$$y(x) = 2c_1 + 6xc_2 + x^2. \tag{2}$$

Подставляя соотношение (2) в равенства (1), получаем систему

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 (2c_1 + 6tc_2 + t^2)\,dt, \\ c_2 &= \int_0^1 (2c_1 t + 6t^2 c_2 + t^3)\,dt, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{3}, \\ c_2 &= c_1 + 2c_2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= -\frac{1}{3}. \\ c_1 + c_2 &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}\right\}$$

Найдем решение этой системы:

$$c_1 = -\frac{5}{24}, \; c_2 = -\frac{1}{24}.$$

Тогда, на основании равенства (2), решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = x^2 - \frac{x}{4} - \frac{5}{12}.$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (1 + x + t)\, y(t)\,dt = f(x).$$

Р е ш е н и е. Данное интегральное уравнение представим в виде

$$y(x) = \lambda(1 + x) \int_0^1 y(t)\,dt + \lambda \int_0^1 ty(t)\,dt + f(s).$$

Обозначая

$$\int_0^1 y(t)\,dt = c_1, \quad \int_0^1 ty(t)\,dt = c_2, \tag{1}$$

имеем

$$y(x) = \lambda(1 + x)\, c_1 + \lambda c_2 + f(s). \tag{2}$$

Подставляя соотношение (2) в равенства (1), имеем

$$\left.\begin{aligned} c_1\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)-\lambda c_2 &= \int_0^1 f(t)\,dt, \\ -\frac{5}{6}\lambda c_1+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_2 &= \int_0^1 tf(t)\,dt. \end{aligned}\right\}$$

Определитель системы

$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 1-\frac{3}{2}\lambda & -\lambda \\ -\frac{5}{6}\lambda & 1-\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}=1-2\lambda-\frac{\lambda^2}{12}\neq 0,$$

откуда единственное решение системы

$$c_1=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int_0^1 f(t)\,dt+\lambda\int_0^1 tf(t)\,dt}{D(\lambda)},$$

$$c_2=\frac{\frac{5}{6}\lambda\int_0^1 f(t)\,dt+\left(1-\frac{3}{2}\lambda\right)\int_0^1 tf(t)\,dt}{D(\lambda)}.$$

Тогда решение имеет вид

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{\left\{1+x+t+\lambda\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(x+t)+xt\right]\right\}f(t)\,dt}{D(\lambda)}.$$

Здесь резольвента

$$\Gamma(x,\ t,\ \lambda)=\frac{1+x+t+\lambda\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(x+t)+xt\right]}{1-2\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}.$$

Пример 3. Найти решение интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin t+\cos x\cos t)\,y(t)\,dt=2x.$$

Решение. Раскрывая скобки в подынтегральной функции и вынося постоянные величины за знак определенного интеграла, имеем

$$y(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos t\,dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2y(t)\,dt+$$
$$+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\sin t\,dt+2x.$$

Пусть

$$\int_{-\pi}^{\pi}y(t)\cos t\,dt=c_1,\quad \int_{-\pi}^{\pi}t^2y(t)\,dt=c_2,\quad \int_{-\pi}^{\pi}y(t)\sin t\,dt=c_3, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 — неизвестные постоянные. Тогда интегральное уравнение можно представить в виде

$$y(x)=c_1\lambda x+c_2\lambda\sin x+c_3\lambda\cos x+2x. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в равенства (1):

$$\left.\begin{aligned}
c_1&=\int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda t+c_2\lambda\sin t+c_3\lambda\cos t+t)\cos t\,dt,\\
c_2&=\int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda t+c_2\lambda\sin t+c_3\lambda\cos t+t)\,t^2\,dt,\\
c_3&=\int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda t+c_2\lambda\sin t+c_3\lambda\cos t+t)\sin t\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
c_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt\right)-c_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt-\\
-c_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt,\\
-c_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3\,dt+c_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin t\,dt\right)-\\
-c_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}t^3\,dt,\\
-c_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t\,dt-c_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt+\\
+c_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Находим входящие в эти уравнения определенные интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^4}{4} - \frac{(-\pi)^4}{4} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi + \pi + \frac{1}{2}\sin(-\pi)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi + \pi - \frac{1}{2}\sin(-2\pi)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t\,d(2t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\cos 2t\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4}\left[\cos 2\pi - \cos(-2\pi)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 2\pi) = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt = -t\cos t\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt = \left[-t\cos t + \sin t\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\pi\cos\pi + \sin\pi - \left[\pi\cos(-\pi) + \sin(-\pi)\right] =$$

$$= -\pi\cdot(-1) + 0 - \left[\pi\cdot(-1) + 0\right] = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

(здесь $u = t$, $du = dt$, $dv = \sin t\,dt$, $v = -\cos t$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt = t\sin t\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,dt = \left[t\sin t - (-\cos t)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \pi\sin\pi + \cos\pi - \left[-\pi\sin(-\pi) + \cos(-\pi)\right] =$$

$$= 0 - 1 + 0 - (-1) = 0$$

(здесь $u=t$, $du=dt$, $dv=\cos t\,dt$, $v=\sin t$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t\,dt = -t^2\cos t\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt =$$
$$= -\pi^2\cos\pi - [-(-\pi)^2\cos(-\pi)] + 2\cdot 0 =$$
$$= -\pi^2\cdot(-1) + \pi^2\cdot(-1) = \pi^2 - \pi^2 = 0$$

(здесь $u=t^2$, $du=2t\,dt$, $dv=\sin t\,dt$, $v=-\cos t$; интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$ вычислен выше),

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\,dt = t^2\sin t\Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt =$$
$$= \pi^2\sin\pi - (-\pi)^2\sin(-\pi) - 4\pi = 0 - 0 - 4\pi = -4\pi$$

(здесь $u=t^2$, $du=2t\,dt$, $dv=\cos t\,dt$, $v=\sin t$; интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt$ вычислен выше).

Подставляя вычисленные значения интегралов в равенства (4), получим систему алгебраических линейных уравнений для нахождения неизвестных c_1, c_2, c_3:

$$\left.\begin{aligned} c_1 \qquad\quad - \lambda\pi c_3 &= 0,\\ c_2 + 4\lambda\pi c_3 &= 0,\\ -2\lambda\pi c_1 - \lambda\pi c_2 + c_3 &= 2.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\pi^2\lambda^2 + 4\pi^2\lambda^2 = 1 + 2\pi\lambda^2 \neq 0.$$

Решая систему (5) методом Крамера, находим

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ 2\pi & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix}}{D(\lambda)} = \frac{2\pi^2\lambda}{1+2\pi\lambda^2},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 0 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & 2\pi & 1 \end{vmatrix}}{D(\lambda)} = \frac{-8\pi^2\lambda}{1+2\pi\lambda^2},$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 2\pi \end{vmatrix}}{D(\lambda)} = \frac{2\pi}{1+2\pi\lambda^2}.$$

Подставляя найденные значения c_1, c_2, c_3 в равенство (2), получаем решение интегрального уравнения:

$$y(x)=\frac{2\pi\lambda}{1+2\pi\lambda^2}(\pi\lambda x-4\pi\lambda\sin x+\cos x)+2x.$$

Упражнения

Решить интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

1. $y(x)-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot y(t)\,dt=2x-\pi.$

Отв. $y(x)=\frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x+2x-\pi.$

2. $y(x)-\int\limits_{-1}^{1}e^{\arcsin x}y(t)\,dt=\operatorname{tg} x.$

Отв. $y(x)=\operatorname{tg} x.$

3. $y(x)-\lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} t\cdot y(t)\,dt=\operatorname{ctg} x.$

Отв. $y(x)=\frac{\pi}{2}\lambda+\operatorname{ctg} x.$

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОГО ЯДРА В РЯД ФУРЬЕ

Для приближенного решения интегрального уравнения

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt, \tag{6.41}$$

где функции $f(x)$ и $K(x,\ t)$ непрерывны, ядро $K(x,\ t)$ заменяют близким к нему вырожденным ядром

$$K^{(n)}(x,\ t)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\,b_i(t). \tag{6.42}$$

Пусть $l=b-a$. Непрерывное ядро $K(x,\ t)$ допускает аппроксимацию тригонометрическим многочленом периода $2l$. Положим

$$K^{(n)}(x,\ t)=\frac{1}{2}a_0(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{6.43}$$

где коэффициенты Фурье

$$a_k(t)=\frac{2}{l}\int_a^b K(x,\ t)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{6.44}$$

Здесь $k=0,\ 1,\ 2\ \ldots$.

Аналогичное разложение можно получить, если поменять ролями переменные x и t. Можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Фурье. Пусть, например,

$$a_k(t) \approx \frac{1}{2} a_{k0} + \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cos \frac{m\pi t}{l}.$$

Тогда на основании зависимостей (6.43) и (6.44), имеем

$$K^{(n)}(x, t) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_{k0} \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} a_{0m} \cos \frac{m\pi t}{l} + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{m\pi t}{l},$$

где $a_{km} = \frac{4}{l^2} \int_a^b \int_a^b K(x, t) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{m\pi t}{l} dx\, dt$. Если $K^{(n)}(x, t)$ есть приближенное вырожденное ядро для точного ядра $K(x, t)$ и функция $f_n(x)$ также близка к функции $f(x)$, то приближенное решение интегрального уравнения

$$z_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b K^{(n)}(x, t)\, z_n(t)\, dt$$

является приближением к точному решению $y(x)$ интегрального уравнения (6.41).

§ 7. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Продолжим исследование интегрального уравнения с вырожденным ядром $K(x, t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t)$ вида

$$y(x) = \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) \right] y(t)\, dt + f(x). \qquad (6.45)$$

Собственными значениями интегрального уравнения (6.45) называются значения параметра λ, при которых разрешимо (т. е. имеет решение) однородное интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) \right] y(t)\, dt, \qquad (6.45')$$

а соответствующие решения однородного интегрального уравнения называются *собственными функциями*.

Запишем, аналогично § 5, однородную линейную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов c_i в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda g_{11})\,c_1 \quad -\lambda g_{12}c_2-\ldots \quad -\lambda g_{1n}c_n=0, \\ -\lambda g_{21}\,c_1+(1-\lambda g_{22})\,c_2-\ldots \quad -\lambda g_{2n}c_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda g_{n1}\,c_1 \quad -\lambda g_{n2}c_2-\ldots+(1-\lambda g_{nn})c_n=0. \end{array}\right\} \qquad (6.46)$$

Здесь g_{ij} и c_i ($i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) имеют тот же смысл, что и в § 5.

Собственные значения являются корнями алгебраического уравнения, полученного от приравнивания нулю определителя системы (6.46)

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda g_{11} & -\lambda g_{12} & \ldots & -\lambda g_{1n} \\ -\lambda g_{21} & 1-\lambda g_{22} & \ldots & -\lambda g_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda g_{n1} & -\lambda g_{n2} & \ldots & 1-\lambda g_{nn} \end{vmatrix}=0, \qquad (6.47)$$

степень которого $m\leqslant n$. Если это уравнение в общем случае имеет m корней, то интегральное решение (6.45′) имеет m собственных значений. Каждому собственному значению λ_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $m\leqslant n$) соответствует ненулевое решение однородной системы (6.46):

$$\begin{array}{l} \tilde{c}_1^{(1)},\ \tilde{c}_2^{(1)},\ \ldots,\ \tilde{c}_n^{(1)} \text{ — первое решение,} \\ \tilde{c}_1^{(2)},\ \tilde{c}_2^{(2)},\ \ldots,\ \tilde{c}_n^{(2)} \text{ — второе решение,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{c}_1^{(m)},\ \tilde{c}_2^{(m)},\ \ldots,\ \tilde{c}_n^{(m)} \text{ — } m\text{-е решение.} \end{array}$$

Если $\lambda_k\neq 0$ является корнем уравнения (6.47), то соответствующие собственные функции $\varphi_k(x)$ вырожденного ядра $K(x,\ t)$ таковы:

$$\begin{array}{l} y_1(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{c}_i^{(1)}a_i(x), \\ y_2(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{c}_i^{(2)}\,a_i(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{c}_i^{(m)}a_i(x). \end{array}$$

Однородное интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt$$

с вырожденным ядром $K(x, t)$ при значениях λ, для которых $\Delta\lambda = 0$, имеет m линейно независимых решений $y(x)$, определяемых соотношениями

$$y_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(k)} a_i(x),$$

где $\tilde{c}_i^{(k)}$ — ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \bar{\lambda}_k g_{ij} \tilde{c}_i^{(k)}) = 0.$$

Если $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ является собственным значением вырожденного ядра $K(x, t)$, то неоднородное интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt$$

не имеет решений или имеет их бесконечно много.

Пример 1. Для интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 y(t)\, dt + f(x)$$

найти собственные значения, собственные функции, решение неоднородного уравнения при произвольном свободном члене $f(x)$ (если λ не является собственным значением), резольвенту, а также решение интегрального уравнения при $\lambda = 3$ и $f(x) = 1$.

Решение. Из данного уравнения, имеем

$$y(x) = \lambda x \int_0^1 t^2 y(t)\, dt + f(x). \tag{1}$$

Пусть

$$c_1 = \int_0^t t^2 y(t)\, dt. \tag{2}$$

Тогда

$$y(x) = \lambda c_1 x + f(x). \tag{3}$$

Подставляя соотиошение (3) в равенство (2), получаем

$$c_1 = \int_0^t t^2 [\lambda c_1 t + f(t)]\, dt = \lambda c_1 \cdot \frac{1}{4} + \int_0^1 t^2 f(t)\, dt,$$

откуда

$$\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) c_1 = \int_0^1 t^2 f(t)\, dt \tag{4}$$

и

$$c_1 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{4}} \int_0^1 t^2 f(t)\, dt. \tag{4'}$$

Для нахождения собственных значений и собственных функций полагаем $f(x) \equiv 0$. Тогда из равенства (4) следует, что

$$\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) c_1 = 0. \tag{5}$$

Это уравнение разрешимо при $\lambda = 4$ и его решение

$$c_1 = C \neq 0,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение интегрального уравнения определяет зависимость (3), а само решение принимает вид

$$\varphi_1(x) = 4Cx = C^*x, \tag{6}$$

где C^* — произвольная постоянная ($C^* = 4C$). Следовательно, собственное значение $\lambda = 4$, а собственная функция $\varphi_1(x) = C^*x$. Если $\lambda \neq 4$, то согласно соотношению (4)

$$c_1 = \frac{\int_0^1 t^2 f(t)\, dt}{1 - \lambda/4}.$$

Подставляя c_1 в равенство (3), получаем решение заданного неоднородного интегрального уравнения

$$y(x) = \frac{4x\lambda \int_0^1 t^2 f(t)\, dt}{4 - \lambda} + f(x),$$

или

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{4xt^2}{4 - \lambda} f(t)\, dt + f(x).$$

Отсюда резольвента

$$\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{4xt^2}{4 - \lambda}.$$

При $\lambda = 3$ и $f(x) = 1$, искомое решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = 3 \int_0^1 \frac{4xt^2}{4 - 3}\, dt + 1 = 4x + 1.$$

Пример 2. Решить неоднородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x + t)\, y(t)\, dt = 1.$$

Решение. Ядро данного интегрального уравнения

$$K(x, t) = \cos(x + t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t,$$

где $0 \leqslant x,\ t \leqslant \pi$, вырожденное, так как оно вида

$$K(x,\ t) = \sum_{i=1}^{2} a_i(x)\, b_i(t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t,$$

где $a_1(x) = \cos x,\ b_1(t) = \cos t;\ a_2(x) = -\sin x,\ b_2(t) = \sin t.$

Система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов c_1 и c_2 имеет вид

$$\left.\begin{aligned} (1 - \lambda g_{11})\, c_1 - \quad \lambda g_{12} c_2 &= f_1, \\ -\lambda g_{21} c_1 + (1 - \lambda g_{22})\, c_2 &= f_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$g_{11} = \int_0^{\pi} b_1(t)\, a_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2},$$

$$g_{12} = \int_0^{\pi} b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_0^{\pi} -\sin t \cos t\, dt = 0,$$

$$g_{21} = \int_0^{\pi} b_2(t)\, a_1(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos t\, dt = 0.$$

$$g_{22} = \int_0^{\pi} b_2(t)\, a_2(t)\, dt = \int_0^{\pi} -\sin^2 t\, dt = -\frac{\pi}{2},$$

$$f_1 = \int_0^{\pi} b_1(t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos t\, dt = 0,$$

$$f_2 = \int_0^{\pi} b_2(t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2.$$

Следовательно, система (1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} c_1\left(1 - \frac{\lambda\pi}{2}\right) &= 0, \\ c_2\left(1 + \frac{\lambda\pi}{2}\right) &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\pi\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\pi\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2\pi^2}{4}$$

и собственные значения $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi},\ \lambda_2 = \frac{2}{\pi}$.

1. Если определитель системы $D(\lambda) \neq 0$, то решения системы

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{2}{1 + \frac{\lambda\pi}{2}}$$

и уравнение имеет единственное решение вида

$$y(x)=\lambda c_1 y_1(x)+\lambda c_2 y_2(x)+f(x),$$

откуда

$$y(x)=-\frac{2\lambda \sin x}{1+\frac{\lambda\pi}{2}}+1.$$

2. Если определитель системы $D(\lambda)=0$, то тогда или $\lambda_1=-\frac{2}{\pi}$ или $\lambda_2=+\frac{2}{\pi}$. При $\lambda_1=-\frac{2}{\pi}$ из системы (2) находим

$$\left.\begin{aligned} c_1&=0,\\ 0&=2,\end{aligned}\right\}$$

что является невозможным. Итак, для этого собственного значения определенное неоднородное уравнение не является решением.

При $\lambda_2=+\frac{2}{\pi}$, из системы (2) находим

$$c_1 - \text{произвольно},$$
$$c_2=1.$$

Итак, решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x)=\frac{2}{\pi}c_1\cos x-\frac{2}{\pi}\sin x+1.$$

Пример 3. Для интегрального уравнения с симметричным ядром

$$y(x)=\lambda\int_0^1 (x+t)\,y(t)\,dt+f(x)$$

найти решение, собственные значения, собственные функции, резольвенту, а также решение при $\lambda=\lambda_k$, где λ_k — найденные собственные значения.

Решение. Ядро $K(x, t)=x+t$, очевидно, вырожденное.

Заданное уравнение можно представить в виде суммы

$$y(x)=\lambda x\int_0^1 y(t)\,dt+\lambda\int_0^1 ty(t)\,dt+f(x). \qquad (1)$$

Предположим, что

$$\int_0^1 y(t)\,dt=c_1,\quad \int_0^1 ty(t)\,dt=c_2. \qquad (2)$$

Тогда данное уравнение принимает вид

$$y(x)=\lambda c_1 x+\lambda c_2+f(x). \qquad (3)$$

Подставляя равенство (3) в соотношения (2), имеем

$$\int_0^1 [\lambda c_1 t + \lambda c_2 + f(t)]\, dt = c_1,$$

$$\int_0^1 t\,[\lambda c_1 t + \lambda c_2 + f(t)]\, dt = c_2.$$

Отсюда

$$\lambda c_1 \int_0^1 t\, dt + \lambda c_2 \int_0^1 dt + \int_0^1 f(t)\, dt = c_1,$$

$$\lambda c_1 \int_0^1 t^2\, dt + \lambda c_2 \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 tf(t)\, dt = c_2,$$

или

$$\lambda c_1 \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \lambda c_2 t\Big|_0^1 + \int_0^1 f(t)\, dt = c_1,$$

$$\lambda c_1 \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \lambda c_2 \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 tf(t)\, dt = c_2$$

и

$$\frac{\lambda c_1}{2} + \lambda c_2 + \int_0^1 f(t)\, dt = c_1,$$

$$\frac{\lambda c_1}{3} + \frac{\lambda c_2}{2} + \int_0^1 tf(t)\, dt = c_2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\, dt &= \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) c_1 - \lambda c_2, \\ \int_0^1 tf(t)\, dt &= -\frac{\lambda}{3} c_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Система (4) имеет решение, если ее определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12} = 0.$$

Отсюда находим собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}.$$

Так как ядро $K(x, t)$ симметричное, т. е.

$$K(x, t) = K(t, x),$$

то собственные значения λ_1 и λ_2 действительны. Чтобы найти собственные функции, решим систему (4) при $\lambda=\lambda_1, \lambda_2$, т. е. систему

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)c_1-\lambda_k c_2=0,\\ -\frac{\lambda_k}{3}c_1+\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)c_2=0.\end{aligned}\right\}$$

Так как уравнения системы зависимые, то берем только одно из них, например, первое

$$\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)c_1-\lambda_k c_2=0 \quad (k=1,\ 2),$$

откуда

$$\lambda_k c_2=c_1\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right).$$

Из уравнения (3) находим собственные функции

$$\varphi_k(x)=c_1\left[\lambda_k x+\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)\right].$$

При $\lambda\neq\lambda_k$ $(k=1,\ 2)$ решение системы (4) таково:

$$c_1=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int\limits_0^1 f(t)\,dt+\lambda\int\limits_0^1 tf(t)\,dt}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}},$$

$$c_2=\frac{\frac{\lambda}{3}\int\limits_0^1 f(t)\,dt+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int\limits_0^1 tf(t)\,dt}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}.$$

Подставляя эти значения в равенство (3), находим решение неоднородного уравнения

$$y(x)=$$

$$=\lambda\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)x\int\limits_0^1 f(t)\,dt+\lambda x\int\limits_0^1 tf(t)\,dt+\frac{\lambda}{3}\int\limits_0^1 f(t)\,dt+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\int\limits_0^1 tf(t)\,dt}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}+f(x),$$

или, после очевидных преобразований,

$$y(x)=\lambda\int\limits_0^1\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)x+\lambda xt+\frac{\lambda}{3}+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)t}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}f(t)\,dt+f(x).$$

Таким образом, резольвента

$$\Gamma(x, t, \lambda)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)x+\lambda xt+\frac{\lambda}{3}+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)t}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}.$$

Ядро симметрично, поэтому собственные функции заданного интегрального уравнения и транспонированного к нему совпадают, т. е.

$$\varphi_k(x)=\psi_k(x)=c_1\left[\lambda_k(x)+\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)\right].$$

Условие разрешимости интегрального уравнения (1) при $\lambda=\lambda_k$ имеет вид

$$\int_0^1 f(x)\left[\lambda_k x+\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)\right]dx=0,$$

или

$$\lambda_k\int_0^1 tf(t)\,dt+\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)\int_0^1 f(t)\,dt=0. \tag{6}$$

Условие (6) является условием совместности системы (4). В этом случае система (4) приводится к одному уравнению

$$\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)c_1-\lambda_k c_2=\int_0^1 f(t)\,dt,$$

или

$$\lambda_k c_2=\left(1-\frac{\lambda_k}{2}\right)c_1-\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Тогда решение любого неоднородного интегрального уравнения (1) при $\lambda=\lambda_k$ имеет вид

$$y(x)=c_1\left(\lambda_k x+1-\frac{\lambda_k}{2}\right)-\int_0^1 f(t)\,dt+f(x).$$

Для интегрального уравнения (6.45) имеют место следующие предположения:

1) если параметр λ не является собственным значением, то неоднородное интегральное уравнение (6.45) имеет единственное решение при любом свободном члене $f(x)$;

2) если параметр λ является собственным значением, т. е. $\Delta(\lambda)=0$, то однородное интегральное уравнение (6.45′) имеет отличные от нуля решения (собственные функции), а неоднородное интегральное уравнение (6.45) разрешимо, если

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx=0,$$

где $\psi(x)$ — любая собственная функция интегрального уравнения с транспонированным ядром $\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, b_i(x)$.

Для однородного интегрального уравнения (6.45′) имеют место следующие предположения:

1) если параметр λ не является его собственным значением (т. е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), то однородное интегральное уравнение (6.45′) имеет единственное нулевое решение $y(x) \equiv 0$;

2) если параметр λ является его собственным значением (т. е. $\Delta(\lambda) = 0$), то однородное интегральное уравнение (6.45′) имеет n ненулевых решений (собственных функций).

Решение однородного интегрального уравнения (6.45′) представляется линейной комбинацией этих собственных функций

$$y(x) = \tilde{c}_1\varphi_1(x) + \tilde{c}_2\varphi_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i\varphi_i(x).$$

Упражнения

Для интегральных уравнений с вырожденными ядрами найти собственные значения, собственные функции, резольвенту и решение неоднородного интегрального уравнения при заданных значениях λ и $f(x)$.

1. $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t\, y(t)\, dt + f(x)$, если $\lambda = 1$, $f(x) = 1$.

Отв. $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, $\varphi_1(x) = C \sin x$, $\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{\sin x \sin t}{1 - \lambda\pi}$, $y = C \sin x + f(x)$, $y(x) \equiv 1$.

2. $y(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2 t + x t^2)\, y(t)\, dt + f(x)$, если $\lambda = \lambda_k$.

Отв. $\lambda_{1,2} = 60 \pm 16\sqrt{15}$, $\varphi_k(x) = \psi_k(x) = c_1\left[x - \frac{5}{\lambda_k}\left(1 + \frac{\lambda_k}{4}\right)x^2\right]$, $\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{\frac{xt}{5}\lambda - \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)xt^2 - x^2 t\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + \frac{x^2 t^2 \lambda}{3}}{1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240}}$, при $\lambda = \lambda_k$ решение $y(x) = \varphi_k(x) - 5x^2 \int_0^1 t^2 f(t)\, dt + f(x)$.

3. $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xt + x^2 t^2)\, y(t)\, dt + f(x)$, если $\lambda = 1$, $f(x) = x$.

Отв. $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\varphi_1(x) = \psi_1(x) = Cx$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$, $\varphi_2(x) = \psi_2(x) = Cx^2$, $\Gamma(x, t, \lambda) = \frac{xt}{1 - \frac{2}{3}\lambda} + \frac{x^2 t^2}{1 - \frac{2}{5}\lambda}$, при $\lambda = \frac{3}{2}$ имеем $y(x) = Cx + f(x) + \frac{15}{4}x^2 \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt$, при $\lambda = \frac{5}{2}$ имеем $y(x) = Cx^2 + f(x) - \frac{15}{4}x \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt$, $y(x) = 3x$.

§ 8. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

Для интегрального уравнения Фредгольма имеют место следующие теоремы.

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). *Неоднородное линейное интегральное уравнение второго рода*

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt \tag{6.48}$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$, или соответствующее однородное интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt \tag{6.49}$$

имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием существования решения $y(x)$ неоднородного интегрального уравнения* (6.48) *во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения $f(x)$ к любому решению $\psi(x)$ сопряженного (союзного) к уравнению* (6.49) *однородного интегрального уравнения* $\psi(x)=\lambda\int_a^b K(t,\ x)\,\psi(t)\,dt$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx=0. \tag{6.50}$$

В случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n a_i(x)\,b_i(t)\right]y(t)\,dt$$

условие ортогональности (6.50) правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t)\,b_i(t)\,dt=0\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6.50'}$$

Пример. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_0^1(5x^2-3)\,t^2y(t)\,dt+e^x.$$

Решение. Пусть

$$c=\int_0^1 t^2y(t)\,dt. \tag{1}$$

Тогда заданное интегральное уравнение принимает вид

$$y(x) = c\lambda(5x^2 - 3) + e^x. \tag{2}$$

Подставляя уравнение (2) в соотношение (1), имеем

$$c = \int_0^1 t^2 [c\lambda(5t^2 - 3) + e^t]\, dt = c\lambda \int_0^1 t^2(5t^2 - 3)\, dt + \int_0^1 t^2 e^t\, dt =$$

$$= c\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2)\, dt + \int_0^1 t^2 e^t\, dt.$$

Отсюда

$$c - c\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2)\, dt = \int_0^1 t^2 e^t\, dt;$$

беря интеграл в правой части равенства по частям ($t^2 = u$, $e^t\, dt = dv$; $du = 2t\, dt$, $v = e^t$), находим

$$c - c\lambda \left[5 \cdot \frac{t^5}{5} - 3 \cdot \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = t^2 e^t \Big|_0^1 - 2\int_0^1 te^t\, dt,$$

или

$$c - c\lambda(1 - 1 - 0 + 0) = e - 2\int_0^1 te^t\, dt.$$

Полагая в последнем интеграле $t = u$, $e^t\, dt = dv$, имеем $du = dt$, $v = e^t$, откуда

$$c = e - 2\left(te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t\, dt\right) = e - 2[e - (e - e^0)] = e - 2.$$

Заданное уравнение при любых значениях λ имеет единственное решение

$$y(x) = \lambda(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x;$$

соответствующее однородное интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)\, t^2 y(t)\, dt$$

имеет единственное нулевое решение $y(x) \equiv 0$.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА И ВОЛЬТЕРРА

Определенный интеграл может быть вычислен с помощью квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x)\, dx = \sum_{i=1}^n k_i F(x_i) + 0[F], \tag{6.51}$$

где x_i — абсциссы точек отрезка $[a, b]$; k_i — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$; $i=1, 2, \ldots, n$; $O[F]$ — остаточный член (ошибка) формулы (6.51).

Обычно

$$k_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} k_i = b-a.$$

Так, для случая равностоящих точек

$$x_i = a+(i-1)h,$$

где $h=\frac{b-a}{n-1}$, имеем:

1) для формулы прямоугольников

$$k_i = h \ (i=1, 2, \ldots, n-1), \ k_n = 0;$$

2) для общей формулы трапеций

$$k_1 = k_n = \frac{h}{2}, \ k_2 = k_3 = \ldots = k_{n-1} = h;$$

3) для общей формулы Симпсона при $n=2m+1$

$$k_1 = k_{2m+1} = \frac{h}{3},$$

$$k_2 = k_4 = \ldots = k_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$k_3 = k_5 = \ldots = k_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x) \ (a \leqslant x \leqslant b). \tag{6.52}$$

Выбираем точки x_i, принадлежащие данному отрезку $[a, b]$, и введем обозначения:

$$y(x_i) = y_i, \ K(x_i, x_j) = K_{ij}, \ f(x_i) = f_i \ (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

В силу квадратурной формулы (6.51) имеем систему уравнений

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_j K_{ij} y_j = f_i + O_i \ (i=1, 2, \ldots, n), \tag{6.53}$$

где O_i — соответствующие ошибки.

Отбрасываем в системе (6.53) величины O_i и для приближенных значений $\tilde{y}_i$ решения $y(x)$ в узлах x_i получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i. \tag{6.54}$$

Введем символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Так как

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \tilde{y}_i,$$

то систему (6.54) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda k_j K_{ij}) \tilde{y}_j = f_i \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.55}$$

Если

$$D(\lambda) = \det (\delta_{ij} - \lambda k_j K_{ij}) \neq 0, \tag{6.56}$$

то система (6.55) имеет единственное решение y_i, которое может быть найдено различными методами. Тогда для решения $y(x)$ получаем из данного интегрального уравнения (6.52) приближенное аналитическое выражение

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} k_j K(x, x_j) \tilde{y}_j. \tag{6.57}$$

Различные корни $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m (m \leqslant n)$ алгебраического уравнения $D(\lambda) = 0$ представляют приближения собственных значений ядра $K(x, t)$.

Если $Y_{ig}^{l} (i = 1, 2, \ldots, n;\ g = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, p_g)$ — соответствующие ненулевые решения однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \tilde{\lambda}_g k_j K_{ij}) Y_{jg}^{l} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то собственные функции ядра приближенно равны

$$\tilde{\varphi}_{gl}(x) = \tilde{\lambda}_g \sum_{j=1}^{n} k_j K(x, x_j) Y_{jg}^{l}.$$

Применение квадратурных формул для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода дает хорошие результаты, если ядро $K(x, t)$ и функция $f(x)$ являются достаточно гладкими функциями *.

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(x, t) y(t) \, dt = f(x).$$

* Функция называется *гладкой*, если она имеет касательную во всех точках, причем угол наклона этой касательной есть непрерывная функция от длины дуги s.

В этом случае приближенные значения $\tilde{y}_i$ решения $y(x)$ в узлах x_i определяются из системы алгебраических уравнений

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} k_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если дано интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt = f(x),$$

то здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$ и соответствующая система алгебраических уравнений

$$\tilde{y}_i - \lambda \sum_{j=1}^{i} k_j K_{ij} \tilde{y}_j = f_i \tag{6.58}$$

является линейной системой с треугольной матрицей.

Если

$$1 - \lambda k_i K_{ii} \neq 0,$$

то из системы (6.58) последовательно находим

$$\tilde{y}_1 = f_1 (1 - \lambda k_1 K_{11})^{-1},$$
$$\tilde{y}_2 = (f_2 + \lambda k_1 K_{21} \tilde{y}_1)(1 - \lambda k_2 K_{22})^{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{y}_n = \left(f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} k_j K_{ij} \tilde{y}_j\right)(1 - \lambda k_n K_{nn})^{-1}.$$

Пример. Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = e^x - \int_0^1 x e^{xt} y(t)\, dt.$$

Решение. На заданном отрезке интегрирования $[0,1]$ узлы выбираем в точках $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}5$; $x_3 = 1$. Здесь шаг $h = 0{,}5$.

Значения функции $f(x) = e^x$ и ядра $K(x, t) = xe^{xt}$ в выбранных узлах приведены в табл. 10.

Таблица 10

Функция $f(x)$	t / x_i	Функция $K_{ij} = K(x_i, t_j)$		
$f(x_i) = f_i$		0	0,5	1
1	0	0	0	0
1,6487	0,5	0,5000	0,6420	1,3592
2,7183	1	1	1,6487	2,7183

На основании квадратурной формулы Симпсона имеем

$$\int_0^1 F(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\,[F(0)+4F(0{,}5)+F(1)].$$

Для нахождения приближенных значений $\tilde{y}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ решения $y(x)$ в узлах x_i имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 1,\\ \tilde{y}_2+\tfrac{1}{6}\,(0{,}5000\tilde{y}_1+2{,}5680\tilde{y}_2+1{,}3592\tilde{y}_3) &= 1{,}6487,\\ \tilde{y}_3+\tfrac{1}{6}\,(\tilde{y}_1+6{,}5948\tilde{y}_2+2{,}7183\tilde{y}_3) &= 2{,}7183. \end{aligned}\right\}$$

Группируя подобные члены, получаем

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 1,\\ 1{,}4280\tilde{y}_2+0{,}2265\tilde{y}_3 &= 1{,}5654,\\ 1{,}0991\tilde{y}_2+1{,}4531\tilde{y}_3 &= 2{,}5516. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, находим

$$\tilde{y}_1=1,\ \tilde{y}_2=0{,}930,\ \tilde{y}_3=1{,}053.$$

Итак, приближенное решение заданного интегрального уравнения имеет вид

$$\tilde{y}(x)=e^x-\frac{x}{6}\left(1+3{,}720e^{\frac{x}{2}}+1{,}053e^x\right).$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамса метод для дифференциального уравнения второго порядка 161—163
— формулы 81, 82
— экстраполяционная формула 83
Адамса — Крылова метод 79—86
Алгебраические операции над матрицами 218—225, *см.* также соотв. названия

Бернулли подстановка 43
— уравнение 53—55
Блок-схема интегрирования линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами 239

Возведение матрицы в степень 220
Вольтерра уравнение, *см.* Интегральное уравнение
Восстанавливающая сила 123
Вронского определитель 114
Вырожденная матрица 217
Вырожденное ядро 344
Вычислительные методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений 292—327, *см.* также соотв. названия

Геометрическая интерпретация задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка 91
— — — — — — — — первого порядка 16
— — особого решения 15
Главная диагональ матрицы 216
Гладкая функция 367

Даламбера метод 209—211
Движение 168
Двухточечные краевые условия 249
— — —, физические примеры 256—273
Диагональная матрица 216
Дифференциальное уравнение 6
— — в полных дифференциалах 58
— — — частных производных 6
— — второго порядка линейное 116
— — — — — неоднородное 116, 154, 155
— — — — — — с постоянными коэффициентами 130, 131
— — — — — однородное 116
— — — — — — с постоянными коэффициентами 118—120
— — диффузии 289
— — — нейтронов 291
— — n-го порядка 90
— — — — вида $y^{(n)} = f(x)$ 94, 95
— — — — — $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ 100, 101
— — — — — $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 108, 109
— — — — линейное 90, 146—149
— — — — — неоднородное 113, 115, 116
— — — — — — с постоянными коэффициентами 128—130
— — — — — однородное 113—115
— — — — — — с постоянными коэффициентами 116—118
— — первого порядка 8, 9
— — — — вида $y' = f(x)$ 18
— — — — — $y' = f(y)$ 22, 23
— — — — линейное 43
— — — — — неоднородное 43—46
— — — — — однородное 43—45
— — — — однородное 39, 40
— — с разделенными переменными 30
— — — разделяющимися переменными 32, 33
— — теплопроводности 278, 279
Дифференцирование матрицы 225, 226
Диффузия 288

Единичная матрица 217

Жесткость балки при изгибе 258

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка 90, 91

— — — — — первого порядка 14
— — — сиcтемы дифференциальных уравнений 164, 168, 169
— о распространении теплоты в бесконечном стержне 279—284
— — — — — конечном стержне 284—288
— — собственных значениях 273
Замена независимой переменной в линейном неоднородном уравнении 147

Изогональные траектории 41
Изоклины 12
Изотропный стержень 334
Интеграл дифференциального уравнения 7, 9
— системы дифференциальных уравнений 166, 168
Интегральная кривая 7, 10, 164
— матрица 230
Интегральное уравнение 328
— — линейное 328
— — — Вольтерра второго рода 330
— — — — первого рода 330
— — — Фредгольма второго рода 328
— — — — — — однородное 329
— — — — — — с вырожденным ядром 345
— — — — — — — симметричным ядром 329
— — — — первого рода 328
— — распределения температуры в однородном изотропном стержне 334
Интегрирование дифференциального уравнения 6, *см.* также по названиям уравнений
— — — с помощью степенных рядов 157—159
— матрицы 226
— систем дифференциальных уравнений, *см.* соотв. методы
Интегрируемая комбинация 186
Интегрирующий множитель 59
Интерполяционный многочлен 69
Интерполяция 69
Итерированные ядра 339

Каноническая матрица 225
— система дифференциальных уравнений 169
— форма системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 237
Квадратная матрица 215
Квадратурные формулы для решения интегральных уравнений 365—368
Квазидиагональная матрица 217
Клеро уравнение 63, 64
Коммутативные матрицы 219
Конечные разности 72
Краевая задача 244
Краевые условия 244
Кронекера символ 346
Крылова метод последовательных приближений 83
— формулы 84

Лагранжа метод, *см.* Метод вариации произвольных постоянных
— уравнение 62, 63
Линейная комбинация 308
— краевая задача 249
— — — неоднородная 250, 252, 274, 275
— — — однородная 250, 251, 273
— система дифференциальных уравнений 194
— — — — неоднородная 195
— — — — однородная 195
Линейно зависимые функции 275
— независимые функции 275
Линейное дифференциальное уравнение, *см.* Дифференциальное уравнение
— интегральное уравнение, *см.* Интегральное уравнение
— краевое условие 250
— — — неоднородное 250
— — — однородное 250
— множество 308
Линейный оператор 307
— элемент 11

Макроскопическое поперечное сечение 291
Матрица 215
Матрица-столбец 216

Матрица-строка 216
Матричная факторизация краевой задачи линейного дифференциального уравнения второго порядка 324—327
— — системы линейных алгебраических уравнений 316—322
Матричный вид системы линейных алгебраических уравнений 316
— метод интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 227—239
Метод вариации произвольных постоянных для линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 45, 46, 152—155
— — — — — — — — — — — постоянными коэффициентами 136, 137, 142—144
— — — — — — — — систем дифференциальных уравнений 195, 196
— вырожденных ядер 345—347
— интегрируемых комбинаций 186, 187
— исключения 181
— конечных разностей 298—301
— матричной факторизации 316—322, 324—327
— неопределенных коэффициентов 129, 158
— последовательного интегрирования 177
— последовательных приближений для уравнения Вольтерра 342, 343
— — — — — Фредгольма 336—339
— разностной факторизации 312—314
— факторизации дифференциального уравнения диффузии нейтронов 309—311
— — конечно-разностных уравнений диффузионного типа 312—314
— — линейного дифференциального уравнения второго порядка 304—307
Механический смысл системы дифференциальных уравнений 167, 168
Начальные данные 14, 91
— значения решения 91
— условия 14, 91
Невырожденная матрица 217
Независимые интегралы 167
Непростой элементарный делитель 224
Нормированная интегральная матрица 232
— фундаментальная система 114
Нулевая матрица 216
Ньютона интерполяционный многочлен 76
— формула для интерполирования вперед 77
— — — — назад 79

Обратная матрица 222
Общее решение дифференциального уравнения 9, 93
— — — — в форме Коши 15, 94
— — системы дифференциальных уравнений 165
— — — — — в форме Коши 166
Общий интеграл дифференциального уравнения 9, 90, 94
— — системы дифференциальных уравнений 167, 169
Обыкновенное дифференциальное уравнение 6
Огибающая 15
Однородная функция 39
Однородное уравнение, *см.* Дифференциальное уравнение
Оператор 307
Определение частного решения линейного однородного дифференциального уравнения в форме функции заданного вида 148, 149
Определитель матрицы 217
Ортогональность функций 329
Особая точка 11
Особое решение 15, 94
— — уравнения Клеро 64
— — — Лагранжа 63

Параболическая интерполяция 69—71
Первые интегралы системы дифференциальных уравнений 167, 168
Первый интеграл дифференциального уравнения 94
Пикара теорема 164
Подобные матрицы 225
Поле направлений 10

— скоростей 168
Понижение порядка 94, 100, 108
— — линейного однородного дифференциального уравнения при известном частном решении 148
Поперечное сечение 291
Порядок дифференциального уравнения 6
— системы дифференциальных уравнений 169
Последовательные приближения решения 337
Преобразование подобия 225
Произведение матриц 219
— матрицы на скаляр 218
Промежуточный интеграл 94
Простой элементарный делитель 224
Прямоугольная матрица 215
Пуассона интеграл 283

Равенство матриц 218
Разложение вырожденного ядра в ряд Фурье 354
Резольвента 339, 347
Решение дифференциального уравнения 7, 90
— задачи Коши 14
— интегрального уравнения 329
— матричного уравнения 230
— системы дифференциальных уравнений 164, 169
Риккати уравнение 305

Сведение дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе n дифференциальных уравнений первого порядка 170, 171
— дифференциального уравнения теплопроводности к системе конечно-разностных уравнений 301—303
— задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка к интегральному уравнению Вольтерра второго рода 330—332
— интегрального уравнения Вольтерра второго рода к задаче Коши 332
— — — Фредгольма второго рода с вырожденным ядром к системе линейных алгебраических уравнений 345—347
— краевой задачи к задаче Коши 292, 293
— — — — системе конечно-разностных уравнений 298—301
— нормальной системы n дифференциальных уравнений первого порядка к дифференциальному уравнению n-го порядка 175
— системы n дифференциальных уравнений n-го порядка к нормальной системе $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка 173—175
— — — линейных дифференциальных уравнений к линейному дифференциальному уравнению n-го порядка 176
Семейство интегральных кривых 90
Симметричное ядро 329
Система дифференциальных уравнений 164
— — — нормальной форме 164, 169
— — — — симметрической форме 168, 169
См. также соотв. названия
Скалярная матрица 216
След матрицы 216
Собственные значения интегрального уравнения 354
— — краевой задачи 273
— — ядра 329
— функции интегрального уравнения 354
— — краевой задачи 273
— — ядра 329
Составление дифференциального уравнения 17
Состояние покоя 168
Степенной ряд от матрицы 226
Структура интегральной матрицы 232—239
— общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка 115, 116
— — — — однородного дифференциального уравнения n-го порядка 117, 118
— — — линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 195

— — — — однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 197, 198
Сумма матриц 218

Таблица конечных разностей 73, 74
Табличные разности 72
Теорема о каноническом представлении матрицы 225
— — существовании решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода 364
— — факторизации квадратной матрицы 317
— существования и единственности решения задачи Коши 16, 91, 92
Теплопроводность 277
Точка покоя 168
Траектория 168
Транспонированная матрица 223
Треугольная матрица 316, 317
Узлы интерполяции 70
Утечка нейтронов 290

Фазовое пространство 167
Факторизованная система 311
Фредгольма альтернатива 364
— уравнение, *см.* Интегральное уравнение
Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения 114
— — — линейной однородной системы дифференциальных уравнений 195, 196

Характеристическая матрица 224
Характеристические числа дифференциального уравнения 117
— — краевой задачи 273
— — матрицы 224
— — системы дифференциальных уравнений 197
— функции краевой задачи 273
Характеристический определитель 224
Характеристическое уравнение дифференциального уравнения 117
— — матрицы 224
— — системы дифференциальных уравнений 197

Частное решение дифференциального уравнения 7, 9, 94
— — системы дифференциальных уравнений 166

Шаг разбиения 72
Штурма — Лиувилля задача 286

Эйлера метод 46, 196
— уравнение 147
— — обобщенное 147, 148
— формула 119
Экспоненциальная функция от матрицы 226
Экстраполяция 69
Элементарные делители матрицы 224

Ядро 328

Кирилл Константинович Пономарев

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор Ж. И. Яковлева. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. Н. Чижевский. Корректор В. А. Внльшанская